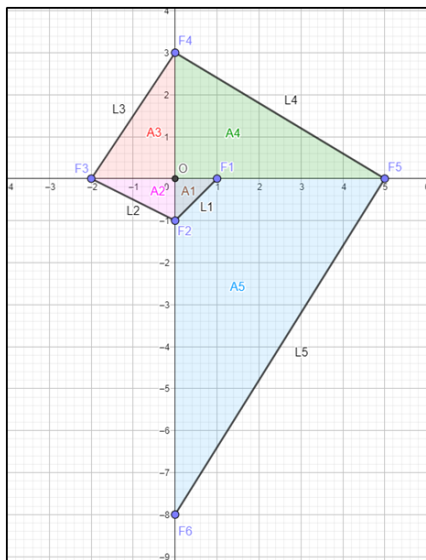


โครงการคณิตศาสตร์

เรื่อง ก้นหอยพีโบ้นักขึ้นระนาบพิกัดฉาก: จินตนาการ จากกราฟสู่ความยาวอนันต์และอัตราส่วนทอง



โดย

นางสาวชนวรรณ นภาพันธุ์

โรงเรียนวิทยาศาสตร์จุฬาภรณราชวิทยาลัย นครศรีธรรมราช

ครูที่ปรึกษา

นายบุญเสริมฐ์ จันทร์ทิน

รายงานนี้เป็นส่วนประกอบของโครงการคณิตศาสตร์ ประถมทฤษฎี ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย
เนื่องในงานงานสัปดาห์วิทยาศาสตร์แห่งชาติส่วนภูมิภาค ประจำปี พ.ศ.๒๕๖๕

โครงการคณิตศาสตร์

เรื่อง ก้นหอยพีโบนัชชีบนระนาบพิกัดฉาก: จินตนาการ
จากกราฟสู่ความยาวอนันต์และอัตราส่วนทอง

โดย

นางสาวธนวรรณ นภาพันธุ์

โรงเรียนวิทยาศาสตร์จุฬาภรณราชวิทยาลัย นครศรีธรรมราช
สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษา นครศรีธรรมราช

ครูที่ปรึกษา

นายบุญเสริม จันทน์ทิน

รายงานนี้เป็นส่วนประกอบของโครงการคณิตศาสตร์ ประเภททฤษฎี ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย
เนื่องในงานงานสัปดาห์วิทยาศาสตร์แห่งชาติส่วนภูมิภาค ประจำปี พ.ศ.๒๕๖๕

บทคัดย่อ

โครงการนี้มีจุดเริ่มต้นจากความสนใจในลำดับของจำนวนฟีโบนัชชี $1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$ ซึ่งเป็นลำดับที่เรียบง่ายแต่มีคุณลักษณะทางคณิตศาสตร์อันน่าสนใจ และปรากฏให้เห็นในธรรมชาติอย่างแพร่หลาย เช่น รูปแบบของกลีบดอกไม้นี้ เปลือกหอย พายุหมุน และกาแล็กซี เป็นต้น ผู้จัดทำเริ่มต้นจากการจินตนาการถึงการนำจำนวนฟีโบนัชชีมากำหนดตำแหน่งเป็นจุดบนแกน X และ Y ในระนาบพิกัดฉากในลักษณะหมุนวนตามลำดับไปเรื่อย ๆ อย่างไม่มีที่สิ้นสุด จากนั้นลากส่วนของเส้นตรงเชื่อมจุดแต่ละคู่ให้ต่อเนื่องกันจนได้รูปเรขาคณิตที่มีลักษณะคล้ายกันหอย ซึ่งในโครงการนี้เรียกว่า “รูปกันหอยฟีโบนัชชีบนระนาบพิกัดฉาก” จากรูปที่สร้างขึ้นดังกล่าว ผู้จัดทำได้สังเกตและตั้งข้อคำถามทางคณิตศาสตร์ จนทำให้สามารถพิสูจน์ทฤษฎีบทที่น่าสนใจได้จำนวน 4 ทฤษฎีบทที่ ได้แก่ 1. ความยาวของส่วนของเส้นตรงเส้นที่ n ในรูปกันหอยฟีโบนัชชีสามารถหาค่าได้จากกราฟที่สองของจำนวนฟีโบนัชชีตัวที่ $2n+1$ 2. อัตราส่วนของความยาวระหว่างเส้นตรงที่อยู่ติดกันจะเข้าสู่อัตราส่วนทองคำ เมื่อ $n \rightarrow \infty$ 3. อัตราส่วนของพื้นที่รูปสามเหลี่ยมในลำดับที่อยู่ติดกันของกันหอยจะเข้าสู่ค่ากำลังสองของอัตราส่วนทองคำ และ 4. ส่วนของเส้นตรงในลำดับที่ติดกันจะตั้งฉากกัน เมื่อ $n \rightarrow \infty$ และสามารถขยายผลต่อไปได้ว่าเส้นที่ห่างกันสองลำดับจะขนานกัน

โครงการนี้เป็นตัวอย่างที่แสดงให้เห็นชัดเจนว่า “คณิตศาสตร์ไม่ใช่เพียงวิชาในตำรา แต่คือภาษาที่ธรรมชาติใช้ในการออกตัวมันเอง” จากเส้นตรงธรรมดา ๆ ที่เชื่อมต่อกัน ทำให้เราได้ค้นพบความลึกซึ้งของรูปเรขาคณิตที่ไม่มีที่สิ้นสุด ผ่านการสังเกต ตั้งคำถาม และการค้นหาความหมายที่ซ่อนอยู่ในสิ่งเรียบง่าย ผลการพิสูจน์และแบบจำลองที่พัฒนาขึ้นนี้ นอกจากให้ความเข้าใจในระดับทฤษฎีแล้ว ในอนาคตอาจเป็นส่วนหนึ่งที่สามารถต่อยอดไปสู่การใช้งานจริง เช่น การสร้างแบบจำลองดาวพายุหมุนหรือกาแล็กซี และที่สำคัญที่สุดคือในมิติของผู้เรียน โครงการนี้เป็นเวทีของการเรียนรู้แบบครบวงจร ตั้งแต่การสังเกต วิเคราะห์ พิสูจน์ คิดสร้างสรรค์ ไปจนถึงการใช้เทคโนโลยีเพื่อแสดงผล

กิตติกรรมประกาศ

โครงการเรื่อง “ก้นหอยพีโบ้กับชิบะระนาบพิกัดฉาก: จินตนาการจากกราฟสู่ความยาวอนันต์และอัตราส่วนทอง” ฉบับนี้ สำเร็จลุล่วงได้ด้วยความกรุณาและการสนับสนุนจากหลายฝ่าย ผู้จัดทำขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างยิ่งต่อคุณครูบุญเสริฐ จันทร์ทิน ซึ่งเป็นครูที่ปรึกษาโครงการที่ได้ให้คำแนะนำอย่างใกล้ชิด ช่วยชี้แนะแนวทางการคิด วิเคราะห์ และพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์อย่างเป็นระบบ รวมทั้งให้กำลังใจตลอดระยะเวลาการดำเนินโครงการ

ผู้จัดทำขอขอบคุณคุณครูกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ทุกท่าน ที่ให้ความรู้พื้นฐานซึ่งเป็นรากฐานสำคัญในการสร้างสรรค์โครงการนี้ รวมถึงเพื่อนนักเรียนที่ช่วยแลกเปลี่ยนความคิดเห็น ทำให้การพัฒนาแนวคิดและการนำเสนอผลงานเป็นไปอย่างสมบูรณ์ยิ่งขึ้น

นอกจากนี้ ผู้จัดทำขอขอบคุณบิดา มารดา และครอบครัวที่ให้กำลังใจ สนับสนุนด้านเวลา และทรัพยากรตลอดการดำเนินงาน ตลอดจนแหล่งข้อมูลต่าง ๆ ที่เปิดโอกาสให้ได้เรียนรู้และจุดประกายความคิดอย่างลึกซึ้ง

ผู้จัดทำหวังเป็นอย่างยิ่งว่า โครงการนี้จะเป็นตัวอย่างหนึ่งของการเรียนรู้ที่เริ่มต้นจากจินตนาการเล่น ๆ สู่ความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ที่มีความหมาย และสามารถเป็นแรงบันดาลใจให้แก่ผู้ที่สนใจในศาสตร์แห่งการค้นหาคำอธิบายนี้ต่อไป

นางสาวธนวรรณ นภาพันธุ์

สารบัญ

		หน้า
บทที่ 1	บทนำ	1
	ความเป็นมาและความสำคัญของโครงการ	1
	วัตถุประสงค์ของโครงการ	2
	ขอบเขตของโครงการ	3
	นิยามศัพท์เฉพาะ	4
	ผลที่คาดว่าจะได้รับ	4
บทที่ 2	ความรู้พื้นฐาน	6
	จำนวนฟีโบนักชี	6
	อัตราส่วนทอง	6
	ทฤษฎีบทสำคัญเกี่ยวกับจำนวนฟีโบนักชี	7
	ทฤษฎีบทพีทาโกรัส	7
	ลิมิต	7
	ความชันของเส้นตรง	8
บทที่ 3	วิธีดำเนินการ	9
	ศึกษาและรวบรวมข้อมูลเบื้องต้น	9
	การสร้างรูปก้นหอยฟีโบนักชี	9
	การสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์	10
	พัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อสนับสนุนการคำนวณ	10
	สรุปผลและจัดทำรายงานโครงการ	10
	เครื่องมือและอุปกรณ์ที่ใช้	11
	ระยะเวลาในการดำเนินงาน	11
บทที่ 4	ผลการดำเนินงาน	12

	ทฤษฎีบทหลัก 4.1	13
	บทแทรก 4.1	13
	โปรแกรมคำนวณความยาวก้นหอยฟีโบนัชชีบนระนาบพิกัดฉาก	14
	ทฤษฎีบทหลัก 4.2	15
	ทฤษฎีบทหลัก 4.3	16
	ทฤษฎีบทหลัก 4.4	17
	บทแทรก 4.2	17
บทที่ 5	สรุป อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ	18
	สรุปผลการดำเนินงาน	18
	อภิปรายผล	18
	ข้อเสนอแนะ	20
	เอกสารอ้างอิง	21

สารบัญรูปภาพ

		หน้า
รูปที่ 4.1	รูปก้นหอยฟิโบนัคชีในระนาบพิกัดฉาก	12
รูปที่ 4.2	โปรแกรมคำนวณความยาวก้นหอยฟิโบนัคชีบนระนาบพิกัดฉาก	14
รูปที่ 4.3	รูปสามเหลี่ยมมุมฉากในก้นหอยฟิโบนัคชี	15
รูปที่ 4.4	มุมระหว่างส่วนของเส้นตรงที่อยู่ติดกันในก้นหอยฟิโบนัคชี	17

บทที่ 1

บทนำ

ความเป็นมาและความสำคัญของโครงการ

ผู้จัดทำโครงการนี้เริ่มต้นด้วยความสนใจใน “จำนวนฟีโบนัชชี” ซึ่งเป็นจำนวนที่สร้างขึ้นอย่างเรียบง่าย แต่กลับซ่อนความน่าพิศวงไว้อย่างลึกซึ้ง โดยจำนวนนี้เริ่มจาก 1 และ 1 แล้วลำดับถัดไปจะได้จากการรวมกันสองจำนวนก่อนหน้า จนกลายเป็นลำดับอนันต์ที่ปรากฏอยู่ในธรรมชาติมากมาย ไม่ว่าจะเป็นการเรียงตัวของกลีบดอกไม้นี้ รูปแบบของเปลือกหอย เกลียวพายุ ไปจนถึงโครงสร้างของกาแลกซี เมื่อลองสังเกตให้ดีจะพบว่าธรรมชาติรอบตัวล้วนมีจำนวนฟีโบนัชชีแทรกอยู่ทุกหนทุกแห่ง รวากับว่าธรรมชาติกำลังใช้คณิตศาสตร์สื่อสารกับเรา ความเข้าใจเบื้องต้นนี้ทำให้ข้าพเจ้ารู้สึกตื่นเต้น และต้องการศึกษาเชิงลึกมากขึ้นเพื่อค้นหาว่า ลำดับของจำนวนที่ธรรมดานี้สามารถนำไปต่อยอดในทางคณิตศาสตร์อย่างไรได้บ้าง

แรงบันดาลใจของโครงการนี้จึงเริ่มต้นจากคำถามง่าย ๆ คือ “จะเกิดอะไรขึ้น ถ้าหากเรานำจำนวนฟีโบนัชชีมากำหนดเป็นจุดบนระนาบพิกัดฉาก โดยเรียงตำแหน่งแบบหมุนทวนหรือตามเข็มนาฬิกาบนแกน X และแกน Y แล้วเชื่อมจุดเหล่านั้นเข้าด้วยส่วนของเส้นตรง?” คำถามนี้ดูเหมือนจะเป็นแค่การวาดรูปเล่นเท่านั้น แต่เมื่อข้าพเจ้าลองลงมือทำ กลับได้ค้นพบว่ารูปเรขาคณิตที่เกิดขึ้นจากการเชื่อมต่อจุดตามจำนวนฟีโบนัชชีกลับกลายเป็นรูปคล้าย “ก้นหอย” ที่หมุนวนไปอย่างไม่มีที่สิ้นสุด ซึ่งมองด้วยสายตาแล้วมันมีสัดส่วนสวยงามและเมื่อนึกภาพจินตนาการว่ามันขยายไปอย่างไม่มีที่สิ้นสุดยิ่งชวนให้ตื่นตาตื่นใจอย่างบอกไม่ถูกว่าทำไมถึงเกิดความรู้สึกแบบนี้ ข้าพเจ้าขอเรียกรูปเรขาคณิตนี้ว่า “ก้นหอยฟีโบนัชชีในระนาบพิกัดฉาก” และใช้เป็นจุดเริ่มต้นของการศึกษาความสัมพันธ์เชิงคณิตศาสตร์ที่ซ่อนอยู่ภายใน เพื่อตอบคำถามในใจว่าทำไมจึงมองรูปนี้แล้วมันจึงได้สะกดตานัก เช่น อาจมีความสัมพันธ์กับค่าอัตราส่วนทองเหมือนกับภาพของโมนาลิซา หรืออาจมีคุณสมบัติทางคณิตศาสตร์ที่น่าสนใจอื่นๆ ที่ยังไม่มีใครค้นพบ การศึกษานี้เป็นการบูรณาการความรู้ทางคณิตศาสตร์จากหลายแขนง ทั้งเรื่องลำดับ ทฤษฎีจำนวน ลิมิต และเรขาคณิต เพื่อค้นหาความรู้ใหม่ที่น่าตื่นเต้น

เมื่อพิจารณาอย่างจริงจัง ข้าพเจ้าพบว่าส่วนของเส้นตรงแต่ละเส้นที่เชื่อมจุดฟีโบนัชชีในก้นหอยนี้มีความสัมพันธ์เชิงเรขาคณิตกับทฤษฎีบทพีทาโกรัส และยังสามารถตั้งสมมติฐานเกี่ยวกับความยาว พื้นที่ และมุมที่เกิดขึ้นในแต่ละส่วนของก้นหอยได้อย่างเป็นระบบ ข้าพเจ้าเริ่มทดลอง

พิสูจน์ข้อสังเกตเหล่านั้นด้วยความรู้คณิตศาสตร์ในระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลายที่กำลังเรียนอยู่ และสามารถสร้างทฤษฎีบทขึ้นได้หลายข้อ โดยเฉพาะความสัมพันธ์ระหว่างความยาวของส่วนของเส้นตรงกับจำนวนฟีโบนัชชี ซึ่งสามารถสรุปเป็นสูตรทั่วไปที่ใช้คำนวณได้ง่าย นอกจากนี้ยังพบว่า อัตราส่วนของความยาวหรือพื้นที่ในก้นหอยมีแนวโน้มจะลู่เข้าสู่ “อัตราส่วนทอง (Golden Ratio)” ซึ่งเป็นค่าคงที่ที่มีความสำคัญในทั้งคณิตศาสตร์ ศิลปะ สถาปัตยกรรม และธรรมชาติ นอกจากการพิสูจน์เชิงทฤษฎีแล้ว ข้าพเจ้ายังได้พัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์อย่างง่าย เพื่อช่วยในการคำนวณความยาวและอัตราส่วนที่เกี่ยวข้อง ซึ่งช่วยลดความซับซ้อนและเพิ่มความน่าสนใจให้กับโครงการสร้างโปรแกรมนี้ทำให้ข้าพเจ้าได้ฝึกทักษะการประยุกต์คณิตศาสตร์กับเทคโนโลยี และเห็นว่าคณิตศาสตร์ไม่ใช่เรื่องไกลตัวอีกต่อไปแต่สามารถนำมาใช้สร้างเครื่องมือที่มีประโยชน์ได้จริง

โครงการนี้จึงไม่ใช่แค่การวาดรูปหรือคำนวณตัวเลขธรรมดา ๆ เท่านั้น แต่คือการบูรณาการความรู้ทางคณิตศาสตร์เข้ากับการสังเกต การตั้งสมมติฐาน การพิสูจน์ การประยุกต์ และการสื่อสารความคิดอย่างเป็นระบบ ข้าพเจ้ามองว่าโครงการนี้เป็นโอกาสให้ผู้เรียนอย่างข้าพเจ้าได้ฝึกฝนการคิดวิเคราะห์อย่างลึกซึ้ง เรียนรู้การใช้คณิตศาสตร์ในโลกจริง และเปิดมุมมองใหม่ที่ทำให้คณิตศาสตร์กลายเป็นเรื่องที่ทั้งสนุก ทำง่าย และมีความหมาย ข้าพเจ้าเชื่อมั่นว่าโครงการนี้จะเป็นตัวอย่างของการเรียนรู้ที่เริ่มจากความสงสัยเล็ก ๆ แล้วค่อยขยายไปสู่ความเข้าใจที่ลึกซึ้งยิ่งขึ้น และเป็นแรงบันดาลใจให้ผู้เรียนรุ่นใหม่ได้มองเห็นว่า คณิตศาสตร์ไม่ใช่เพียงวิชาในตำรา แต่คือภาษาที่สามารถอธิบายความสวยงามของโลกใบนี้ได้อย่างน่าทึ่ง ดังในประวัติศาสตร์เคยได้แสดงให้เห็นว่าการค้นพบทางคณิตศาสตร์ที่ดูเหมือนเป็นเพียงความสวยงามทางทฤษฎีในตอนแรก อาจกลายเป็นรากฐานของเทคโนโลยีที่เปลี่ยนแปลงโลกในเวลาต่อมา เช่นเดียวกับที่ลำดับฟีโบนัชชีที่ค้นพบในศตวรรษที่ 13 ได้กลายมาเป็นแรงบันดาลใจในการพัฒนานวัตกรรมมากมายในปัจจุบัน ตั้งแต่งานศิลปะ สถาปัตยกรรม ไปจนถึงการออกแบบอัลกอริทึมในคอมพิวเตอร์

วัตถุประสงค์ของโครงการ

โครงการนี้จัดทำขึ้น โดยมีเป้าหมายเพื่อศึกษาและสำรวจสมบัติทางคณิตศาสตร์ของจำนวนฟีโบนัชชี ผ่านการประยุกต์เชิงเรขาคณิตในระนาบพิกัดฉาก โดยมีวัตถุประสงค์สำคัญดังต่อไปนี้

1. เพื่อสร้างรูปเรขาคณิตที่เกิดจากการลากเส้นเชื่อมจุดพิกัดของจำนวนฟีโบนัชชีบนระนาบพิกัดฉากในลักษณะการหมุนตามหรือทวนเข็มนาฬิกา และสำรวจความสัมพันธ์ที่น่าสนใจในรูปเรขาคณิตที่ได้

2. เพื่อสร้างและพิสูจน์ข้อความคาดการณ์ที่ได้จากการสังเกต ด้วยการใช้ความรู้พื้นฐานและหลักการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์อย่างเป็นระบบ
3. เพื่อพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์อย่างง่าย สำหรับคำนวณและแสดงผลข้อมูลจากทฤษฎีบทที่ค้นพบ ซึ่งสะท้อนถึงการประยุกต์ความรู้ทางคณิตศาสตร์เข้ากับเทคโนโลยีในทางปฏิบัติ

ขอบเขตของโครงการ

1. ขอบเขตเนื้อหา

โครงการนี้มุ่งศึกษาความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์ที่เกิดจากการนำลำดับจำนวนฟีโบนัชชีมากำหนดเป็นจุดบนระนาบพิกัดฉาก โดยเชื่อมจุดเหล่านั้นด้วยส่วนของเส้นตรงตามลำดับในลักษณะการหมุนทวนหรือตามเข็มนาฬิกา เพื่อสร้างรูปเรขาคณิตที่เรียกว่า “ก้นหอยฟีโบนัชชีในระนาบพิกัดฉาก” จากนั้นจึงศึกษาความสัมพันธ์เชิงเรขาคณิต เช่น ความยาวของส่วนของเส้นตรง อัตราส่วนของความยาวและพื้นที่ การเปลี่ยนแปลงของขนาดของมุมระหว่างส่วนของเส้นตรง และแนวโน้มการเข้าสู่อัตราส่วนทองของอัตราส่วนต่าง ๆ ในรูปก้นหอยฟีโบนัชชี

2. ขอบเขตทางคณิตศาสตร์

ความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในโครงการนี้เป็นในระดับมัธยมศึกษา ได้แก่ พื้นฐานเรื่องลำดับและอนุกรม สมบัติของรากที่สอง การคำนวณระยะทางระหว่างจุดในระนาบพิกัดฉาก ความชันของเส้นตรง ทฤษฎีบทพีทาโกรัส และทฤษฎีเกี่ยวกับเกี่ยวกับลิมิตอนันต์

3. ขอบเขตของเครื่องมือและการดำเนินการ

ผู้จัดทำใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ เช่น Python และ GeoGebra ในการคำนวณและสร้างภาพกราฟิกของก้นหอยฟีโบนัชชี เพื่อช่วยตรวจสอบความถูกต้องของการคำนวณ และแสดงผลลัพธ์ทางเรขาคณิต ทั้งนี้โครงการมุ่งเน้นการสร้างและพิสูจน์สมบัติทางคณิตศาสตร์มากกว่าการพัฒนาโปรแกรมในเชิงเทคนิค

4. ขอบเขตของการประยุกต์ใช้

โครงการนี้มุ่งเน้นการพิสูจน์สมบัติทางคณิตศาสตร์ การสร้างแบบจำลองทางเรขาคณิต และการพัฒนาโปรแกรมช่วยคำนวณเบื้องต้นของรูปก้นหอยฟีโบนัชชี โดยไม่ครอบคลุมการทดลองทางกายภาพหรือการเก็บข้อมูลเชิงประจักษ์จากธรรมชาติจริง แต่ในอนาคตอาจสามารถนำความรู้ที่ได้จากโครงการนี้ไปต่อยอดได้ เช่น การศึกษารูปแบบของเกลียวพายุหมุน โครงสร้างของดาราจักร หรือการสร้างสรรคงานศิลปะและสถาปัตยกรรมที่สะท้อนถึงอัตราส่วนทอง

นิยามศัพท์เฉพาะ

1. **จำนวนฟีโบนัชชี** คือ ลำดับตัวเลขที่เริ่มต้นด้วย 1 และ 1 และแต่ละจำนวนถัดไปจะเป็นผลรวมของสองจำนวนก่อนหน้า สามารถเขียนบทนิยามทางคณิตศาสตร์ได้ว่า $F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$ โดยที่ $F_1 = 1$ และ $F_2 = 1$ โดยเราจะกำหนดให้ F_n แทน จำนวนฟีโบนัชชีตัวที่ n ตัวอย่างลำดับจำนวนฟีโบนัชชี 30 ตัวแรก ได้แก่ 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946, 17711, 28657, 46368, 75025, 121393, 196418, 317811, 514229, 832040

2. **อัตราส่วนทอง (Golden Ratio)** อัตราส่วนทอง คือ ค่าคงที่ทางคณิตศาสตร์ที่เป็นจำนวนอตรรกยะ ซึ่งมีค่าเท่ากับ $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ มีตัวอักษรตัวที่ 21 ในภาษากรีก ϕ อ่านว่า “ฟี (Phi)” เป็นสัญลักษณ์ นั่นคือ $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.61803...$ อัตราส่วนทองถูกขนานนามว่าเป็นอัตราส่วนที่งดงามและสมบูรณ์ที่สุดในธรรมชาติ ซึ่งถูกนำมาใช้ในการสร้างสรรค์งานศิลปะ สถาปัตยกรรม และสิ่งก่อสร้างที่สำคัญมากมาย อัตราส่วนทองยังมีความสัมพันธ์โดยตรงกับลำดับเลขฟีโบนัชชี กล่าวคือ อัตราส่วนของจำนวนฟีโบนัชชีที่อยู่ติดกันจะมีค่าใกล้เคียงกับอัตราส่วนทองเสมอ อย่างเช่น 55 หารด้วย 34 มีค่าใกล้เคียงกับ 1.618 และเมื่อตัวเลขมีค่าสูงขึ้นอัตราส่วนที่เกิดขึ้นยิ่งมีค่าเข้าใกล้อัตราส่วนทองมากยิ่งขึ้น

3. **ก้นหอยฟีโบนัชชี (Fibonacci Spiral)** คือ รูปเรขาคณิตที่เกิดจากการกำหนดจุดบนแกน X และแกน Y ในระนาบพิกัดฉากด้วยจำนวนฟีโบนัชชีไปตามลำดับ แล้วเชื่อมต่อจุดเหล่านั้นด้วยส่วนของเส้นตรงในลักษณะการหมุนวนต่อเนื่อง ทำให้ได้รูปคล้ายก้นหอยที่สามารถขยายออกไปได้อย่างไม่มีที่สิ้นสุด

4. **ความยาวอนันต์ (Infinite Length)** คือ ความยาวของส่วนของเส้นตรงที่เกิดจากการเชื่อมจุดในก้นหอยฟีโบนัชชีซึ่งเมื่อลำดับของจำนวนฟีโบนัชชีเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ ความยาวของส่วนของเส้นตรงจะมีการขยายออกไปอย่างไม่มีที่สิ้นสุด

ผลที่คาดว่าจะได้รับ

1. ได้รูปเรขาคณิตซึ่งเกิดจากการลากเส้นเชื่อมจุดพิกัดของจำนวนฟีโบนัชชีในลักษณะการหมุนบนระนาบพิกัดฉาก พร้อมคำอธิบายถึงคุณลักษณะเฉพาะของรูปเรขาคณิตนี้ ซึ่งในโครงงานนี้จะเรียกว่า “รูปก้นหอยฟีโบนัชชีในระนาบพิกัดฉาก”

2. ได้ทฤษฎีบทใหม่ที่เกิดจากการพิสูจน์ความสัมพันธ์เชิงคณิตศาสตร์ของรูปก้นหอยฟีโบนัชชีในระนาบพิกัดฉาก

3. ได้โปรแกรมคอมพิวเตอร์อย่างง่ายที่ใช้คำนวณและแสดงผลค่าต่าง ๆ ของข้อมูลจาก ทฤษฎีบทที่ค้นพบ ซึ่งสะท้อนถึงการประยุกต์ความรู้ทางคณิตศาสตร์เข้ากับเทคโนโลยีในทาง ปฏิบัติ
4. ผู้จัดทำเกิดการพัฒนาทักษะด้านการสังเกต การคิดวิเคราะห์ การตั้งสมมติฐาน การ พิสูจน์อย่างมีเหตุผล ตลอดจนทักษะด้านเทคโนโลยีสารสนเทศ เพื่อใช้ในการประมวลผลและ นำเสนอข้อมูลทางคณิตศาสตร์
5. โครงการนี้สามารถใช้เป็นสื่อหรือกิจกรรมการเรียนรู้ในห้องเรียนคณิตศาสตร์ เพื่อ ส่งเสริมการเรียนรู้ผ่านการสังเกตและการตั้งคำถาม พร้อมทั้งจุดประกายให้ผู้เรียนเห็นว่า คณิตศาสตร์เกี่ยวข้องกับธรรมชาติ ศิลปะ และชีวิตจริงได้
6. ผลงานที่ได้อาจต่อยอดไปสู่การวิจัยขยายผลในระดับที่สูงขึ้น เช่น การประยุกต์ใช้ แนวคิดนี้ในการออกแบบทางสถาปัตยกรรม ศิลปกรรม ตลอดจนการใช้แบบจำลองทาง คณิตศาสตร์จากกันหอยฟิโบนัคชีในระนาบพิกัดฉากเพื่อการวิเคราะห์โครงสร้างในธรรมชาติ เช่น การคำนวณระยะห่างระหว่างดวงดาวในกาแลกซี หรือการจำลองโครงสร้างของตาข่ายหมุนที่มี ลักษณะเป็นเกลียว

บทที่ 2

เอกสารที่เกี่ยวข้อง

2.1 จำนวนฟีโบนัชชี (Fibonacci Numbers)

จำนวนฟีโบนัชชี คือ ลำดับตัวเลขที่เริ่มต้นด้วย 1 และ 1 และแต่ละจำนวนถัดไปจะเป็นผลรวมของสองจำนวนก่อนหน้า สามารถเขียนบทนิยามทางคณิตศาสตร์ได้ว่า $F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$ โดยที่ $F_1 = 1$ และ $F_2 = 1$ โดยเราจะกำหนดให้ F_n แทน จำนวนฟีโบนัชชีตัวที่ n เช่น $F_6 = 8, F_7 = 13, F_8 = 21$ เป็นต้น ตัวอย่างลำดับจำนวนฟีโบนัชชี 12 ตัวแรก ได้แก่ 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144

2.2 อัตราส่วนทอง (Golden Ratio)

อัตราส่วนทอง คือ อัตราส่วนทางคณิตศาสตร์ที่แปลกพิสดารที่สุดค่าหนึ่งบนโลก เป็นจำนวนอตรรกยะ (Irrational Number) ที่มีค่าเท่ากับ $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ มีตัวอักษรตัวที่ 21 ในภาษากรีก ϕ อ่านว่า “ฟี (Phi)” เป็นสัญลักษณ์ นั่นคือ $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618033988749895...$ อัตราส่วนทองถูกขนานนามว่าเป็นอัตราส่วนที่งดงามและสมบูรณ์ที่สุดในธรรมชาติ ซึ่งถูกนำมาใช้ในการสร้างสรรค์งานศิลปะ สถาปัตยกรรม และสิ่งก่อสร้างที่สำคัญมากมาย อัตราส่วนทองค่านี้มีความสัมพันธ์โดยตรงกับลำดับเลขฟีโบนัชชี (Fibonacci Sequence) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89 ... กล่าวคือ อัตราส่วนของจำนวนฟีโบนัชชีที่อยู่ติดกันจะมีค่าใกล้เคียงกับอัตราส่วนทองเสมอ อย่างเช่น 55 หารด้วย 34 มีค่าใกล้เคียงกับ 1.618 และเมื่อตัวเลขมีค่าสูงขึ้นอัตราส่วนที่เกิดขึ้นยิ่งมีค่าเข้าใกล้สัดส่วนทองมากยิ่งขึ้น

อัตราส่วนทองถูกค้นพบมากกว่า 2,200 ปีมาแล้ว โดยชาวกรีกโบราณ ซึ่งมีความเชื่อต่ออัตราส่วนทองนี้ว่าเป็นสัดส่วนของความสมบูรณ์พร้อมทางความงามของสรรพสิ่งในจักรวาลและกฎแห่งธรรมชาติ มนุษย์จึงนำอัตราส่วนอันพิสดารนี้มาใช้ในการสร้างสรรค์งานศิลปะและใช้ในการก่อสร้างสิ่งปลูกสร้างที่มีความสำคัญมากมาย ตัวอย่างของอัตราส่วนทองในธรรมชาติ เช่น อัตราส่วนระหว่างส่วนสูงของมนุษย์ต่อส่วนของร่างกายตั้งแต่สะดือถึงเท้าจะมีค่าประมาณ 1.618 เช่นเดียวกับอัตราส่วนระหว่างไหล่ถึงปลายนิ้วมือกับส่วนของข้อศอกถึงปลายนิ้วมือ ในเมล็ดทานตะวันการจัดเรียงตัวเป็นเกลียวของเมล็ดทานตะวัน ซึ่งแต่ละเกลียวตรงกับลำดับเลขฟีโบนัชชี โดยมีอัตราส่วนเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลมเกลียวของเมล็ดทานตะวันแต่ละวงเทียบกับวงถัดไป

เท่ากับอัตราส่วนทอง สิ่งก่อสร้างและงานศิลปะ เช่น มหาวิหารพาร์เธนอน (Parthenon) ในกรีซ มหาวิหารนอเทรอดาม (Notre Dame Cathedral) ในฝรั่งเศส และพีระมิดของอียิปต์ต่างมีอัตราส่วนทองทองซ่อนอยู่ รวมไปถึงภาพวาดโมนาลิซา (Mona Lisa) ของเลโอนาร์โด ดา วินชี (Leonardo da Vinci) เป็นต้น

2.3 ทฤษฎีบทสำคัญเกี่ยวกับจำนวนฟีโบนัชชี

ทฤษฎีบท 2.1 $F_{2n-1} = F_n^2 + F_{n-1}^2$

ทฤษฎีบท 2.2 (สูตรปิดของจำนวนฟีโบนัชชี: Binet's Formula) $F_n = \frac{\varphi^n - (1-\varphi)^n}{\sqrt{5}}$

ทฤษฎีบท 2.3 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi$

ทฤษฎีบท 2.4 $\varphi^2 = 1 + \varphi$

2.4 ทฤษฎีบทพีทาโกรัส (Pythagorean Theorem)

ทฤษฎีบทพีทาโกรัส คือ ทฤษฎีที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความยาวของด้านทั้ง 3 ของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ซึ่งกล่าวว่า “สำหรับรูปสามเหลี่ยมมุมฉากใด ๆ กำลังสองของความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก เท่ากับผลบวกของกำลังสองของความยาวของด้านประกอบมุมฉาก” กล่าวคือ ถ้า $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มี C เป็นมุมฉาก และมีด้านตรงข้ามมุมฉากยาว c หน่วย และด้านประกอบมุมฉากยาว a และ b หน่วยโดยทฤษฎีบทพีทาโกรัส จะได้ว่า $c^2 = a^2 + b^2$

บทกลับของทฤษฎีบทพีทาโกรัสเป็นจริงด้วยเช่นกัน กล่าวคือ “รูปสามเหลี่ยมใด ๆ ที่กำลังสองของความยาวของด้านด้านหนึ่ง เท่ากับผลบวกของกำลังสองของความยาวของด้านอีกสองด้าน แล้วรูปสามเหลี่ยมนั้นจะเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก” โดยจากบทกลับของทฤษฎีบทพีทาโกรัสเราสามารถใช้ในการตรวจสอบชนิดของรูปสามเหลี่ยมได้ว่า ถ้า $c^2 = a^2 + b^2$ แล้ว $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ถ้า $c^2 < a^2 + b^2$ แล้ว $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมแหลม และถ้า $c^2 > a^2 + b^2$ แล้ว $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมป้าน

2.5 ลิมิต (Limit)

ลิมิตของฟังก์ชัน $y = f(x)$ คือ ค่าที่ฟังก์ชันเข้าใกล้ เมื่อตัวแปร x เข้าใกล้ค่าใดค่าหนึ่ง โดยไม่จำเป็นว่าค่าของฟังก์ชันจะต้องมีค่าเท่ากับลิมิตที่จุดนั้นเสมอไป สมมติเรามีฟังก์ชัน

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} \text{ ถ้าเราแทนค่า } x = 1 \text{ โดยตรง จะได้ค่าเป็น } \frac{0}{0} \text{ ซึ่งหาค่าไม่ได้ แต่ถ้าเราแทนค่า } x \text{ ที่}$$

ใกล้เคียงกับ $x = 1$ เช่น $x = 0.9, 0.99, 0.999$ หรือ เส้นตรงในระนาบพิกัดจาก เราจะสังเกตว่าค่า

ของ $f(x)$ เข้าใกล้ 2 ดังนั้นเราบอกว่า ลิมิตของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ 1 คือ 2 และเราเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$

ลิมิตอนันต์ คือ ค่าที่ฟังก์ชันเข้าใกล้เมื่อ x มีค่ามากขึ้นเรื่อยๆ (เข้าใกล้อนันต์) หรือน้อยลงเรื่อยๆ (เข้าใกล้ลบอนันต์) ตัวอย่างเช่น $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ เพราะเมื่อ x มีค่ามากขึ้น $\frac{1}{x}$ จะเข้าใกล้ 0

$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x + 3 = -\infty$ เพราะเมื่อ x มีค่าน้อยลงเรื่อยๆ $2x + 3$ จะมีค่าน้อยลงเรื่อยๆ เช่นกัน

ทฤษฎีบท 2.5 ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก แล้ว $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^n} = 0$

ทฤษฎีบท 2.6 ให้ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L_1$ และ $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = L_2$ เมื่อ L_1, L_2 เป็นจำนวนจริง แล้ว

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} (f \pm g)(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = L_1 \pm L_2$
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} [cf(x)] = c \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = cL_1$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว
3. $\lim_{x \rightarrow \infty} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = L_1 \cdot L_2$
4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{f}{g} \right)(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)}{\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$ เมื่อ $L_2 \neq 0$
5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)} = \sqrt{L_1}$

2.6 ความชันของเส้นตรง

ให้ l เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$ โดยที่ $x_1 \neq x_2$ ความชันของเส้นตรง

l คือ $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ จากความหมายดังกล่าวจะพบว่า ถ้า $x_1 = x_2$ แล้ว เส้นตรง l จะมีลักษณะเป็นเส้นแนวตั้งที่ขนานกับแกน Y และจะหาความชันไม่ได้ ถ้า $y_1 = y_2$ แล้ว เส้นตรง l จะมีลักษณะเป็นเส้นแนวนอนที่ขนานกับแกน X และมีความชันเท่ากับ 0 เส้นตรง l จะทำมุมแหลมกับแกน X (วัดมุมแบบทวนเข็มนาฬิกาจากแกน X) เมื่อ $m > 0$ และ เส้นตรง l จะทำมุมป้านกับแกน X เมื่อ $m < 0$

ทฤษฎีบท 2.7 เส้นตรงสองเส้นที่ไม่ขนานกับแกน Y จะขนานกันก็ต่อเมื่อความชันของเส้นตรงทั้งสองเท่ากัน

ทฤษฎีบท 2.8 เส้นตรงสองเส้นที่ไม่ขนานกับแกน Y จะตั้งฉากกันก็ต่อเมื่อผลคูณของความชันของเส้นตรงทั้งสองเท่ากับ -1

บทที่ 3

วิธีดำเนินการ

การดำเนินโครงการ “ก้นหอยฟีโบนัชชีบนระนาบพิกัดฉาก: จินตนาการจากกราฟสู่ความยาวอนันต์และอัตราส่วนทอง” เป็นการศึกษาทางคณิตศาสตร์ที่ผสมผสานการสังเกต การตั้งข้อความคาดการณ์ การพิสูจน์เชิงทฤษฎี และการประยุกต์ใช้เทคโนโลยี โดยมีขั้นตอนการดำเนินงานอย่างเป็นระบบ ดังนี้

3.1 ศึกษาและรวบรวมข้อมูลเบื้องต้น

1. ศึกษาบทนิยามของจำนวนฟีโบนัชชี และทฤษฎีบทสำคัญที่เกี่ยวข้องกับจำนวนฟีโบนัชชี จากหนังสือ บทความ และแหล่งข้อมูลออนไลน์ เพื่อให้เข้าใจโครงสร้างและสมบัติสำคัญของจำนวนฟีโบนัชชี
2. ทบทวนความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง ได้แก่ การอ้างอิงตำแหน่งจุดบนระนาบพิกัดฉาก ทฤษฎีบทพีทาโกรัส ระยะทางระหว่างจุด ความชันของเส้นตรง พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ความรู้เกี่ยวกับอัตราส่วนทอง และลิมิตของฟังก์ชัน
3. รวบรวมตัวอย่างปรากฏการณ์ที่เกี่ยวข้องกับของลำดับฟีโบนัชชีในธรรมชาติ เช่น การเรียงของกลีบดอกไม้นี้ รูปแบบเปลือกหอย พายุหมุน และดาราจักร เพื่อใช้เป็นแนวทางในการตั้งคำถามเพื่อสร้างข้อความคาดการณ์

3.2 สร้างรูปเรขาคณิตก้นหอยฟีโบนัชชี

1. หาจำนวนฟีโบนัชชีจำนวน โดยใช้สูตร $F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$ โดยที่ $F_1 = 1$ และ $F_2 = 1$
2. กำหนดตำแหน่งของจุดจำนวนฟีโบนัชชีลงบนแกนพิกัดฉาก โดยหมุนตำแหน่งตามลำดับในแนว ขวา-ล่าง-ซ้าย-บน วนไปเรื่อย ๆ โดยไม่คำนึงถึงเครื่องหมาย
3. ลากเส้นเชื่อมจุดที่อยู่ติดกันตามลำดับ เพื่อให้ได้รูปเรขาคณิตซึ่งมีลักษณะคล้ายก้นหอย
4. สังเกต สืบค้น และทดสอบรูปแบบหรือคุณสมบัติที่น่าสนใจ เช่น ความยาวของเส้นตรง มุมระหว่างเส้น และพื้นที่ที่เกิดขึ้นในรูปสามเหลี่ยมแต่ละชุด

3.3 สร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์

1. ตั้งข้อความคาดการณ์ (Conjecture) จากรูปที่สร้างขึ้น เช่น ความสัมพันธ์ระหว่างความยาวของส่วนของเส้นตรงกับจำนวนฟีโบนัชชี อัตราส่วนของความยาวที่ลู่อู่เข้าสู่อัตราส่วนทองคำ มุมระหว่างเส้นที่ลู่อู่เข้าสู่ 90 องศา
2. ใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ เช่น ทฤษฎีบทพีทาโกรัส ลิมิต และสูตรฟีโบนัชชีรูปแบบปิด (Binet's Formula) ในการพิสูจน์ข้อความคาดการณ์
3. สรุปผลการพิสูจน์ พร้อมจัดทำเป็นทฤษฎีบทที่ค้นพบใหม่

3.4 พัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อสนับสนุนการคำนวณ

1. เขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์อย่างง่าย โดยใช้ภาษา Python เพื่อคำนวณความยาวของส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างตำแหน่งของจำนวนฟีโบนัชชีที่อยู่ติดกัน และความยาวรวมของเส้นก้นหอยฟีโบนัชชี
2. ทดสอบความถูกต้องของโปรแกรมโดยเปรียบเทียบกับผลการคำนวณด้วยมือ

3.5 สรุปผลและจัดทำรายงานโครงการ

1. สรุปผลการดำเนินงานตั้งแต่ขั้นตอนการสร้างรูป การตั้งข้อสังเกต การพิสูจน์ และการเขียนโปรแกรม
2. วิเคราะห์คุณค่าของผลงาน ทั้งในเชิงความรู้และการพัฒนาทักษะของผู้จัดทำ
3. จัดทำรายงานโครงการ พร้อมเอกสารประกอบ ภาพ แผนภูมิ ตาราง และตัวอย่างโค้ดโปรแกรม
4. เตรียมโปสเตอร์หรือสื่อประกอบการนำเสนอ เพื่อใช้เผยแพร่ผลงาน

3.6 เครื่องมือและอุปกรณ์ที่ใช้

1. เครื่องคำนวณและซอฟต์แวร์ ได้แก่ เครื่องคิดเลขหรือโปรแกรมคอมพิวเตอร์ เช่น Python เพื่อช่วยในการคำนวณและวิเคราะห์ข้อมูล
2. โปรแกรมสร้างรูปเรขาคณิต เช่น GeoGebra
3. หนังสือและบทความทางคณิตศาสตร์

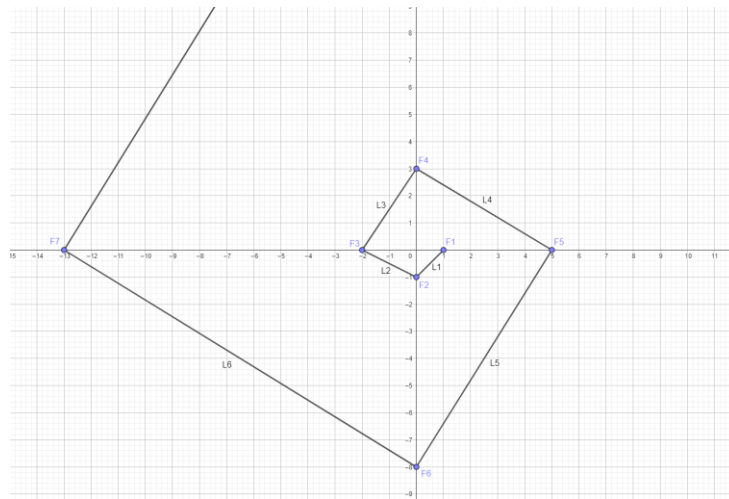
3.7 ระยะเวลาในการดำเนินงาน

สัปดาห์ที่	กิจกรรม
1-4	ศึกษาข้อมูลพื้นฐานและทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง
5-7	วิเคราะห์ข้อมูลและค้นหารูปแบบ
8-11	พัฒนาข้อความคาดการณ์ทางคณิตศาสตร์
12-15	สร้างการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์
16-17	เขียนรายงาน
18-20	นำเสนอและเผยแพร่ผลงาน

บทที่ 4

ผลการดำเนินงาน

ถ้าเรานำจำนวนฟีโบนัชชีมาลงตำแหน่งบนระนาบพิกัดฉากโดยไม่คำนึงถึงเครื่องหมายบนแกน X และแกน Y แบบหมุน ตาม (หรือทวน) เข็มนาฬิกา จะพบว่าส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจำนวนฟีโบนัชชีตัวที่อยู่ติดกัน จะมีลักษณะคล้ายกับก้นหอยที่หมุนวนไปอย่างไม่สิ้นสุด ซึ่งในโครงงานนี้เราจะเรียกรูปเรขาคณิตดังกล่าวว่า “รูปก้นหอยฟีโบนัชชีในระนาบพิกัดฉาก” ดังรูปที่ 4.1



รูปที่ 4.1 รูปก้นหอยฟีโบนัชชีในระนาบพิกัดฉาก

ในที่นี้เราจะกำหนดให้ L_n แทนส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุด F_n และจุด F_{n+1} และ $|L_n|$ แทน ความยาวของ L_n จากการสังเกตก้นหอยฟีโบนัชชีจะพบว่า L_1 เป็นด้านตรงข้ามมุมฉากของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก OF_1F_2 และ L_2 เป็นด้านตรงข้ามมุมฉากของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก OF_2F_3 เป็นเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ โดยทฤษฎีบทพีทาโกรัส จึงได้ว่า $|L_1| = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} = \sqrt{F_3}$, $|L_2| = \sqrt{F_2^2 + F_3^2} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} = \sqrt{F_5}$, $|L_3| = \sqrt{F_3^2 + F_4^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} = \sqrt{F_7} \dots$

ซึ่งจะสังเกตว่า $|L_n| = \sqrt{F_{2n+1}}$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$ ดังนั้นถ้าเราสามารถพิสูจน์ได้ว่าข้อสังเกตดังกล่าวเป็นจริง จะทำให้เราได้สูตรทั่วไปในการหาความยาวของ L_n ได้อย่างง่ายดายโดยการพิจารณาจากลำดับของจำนวนฟีโบนัชชี ทำให้เกิดข้อความคาดการณ์ 4.1 ดังต่อไปนี้

ข้อความคาดการณ์ 4.1 $|L_n| = \sqrt{F_{2n+1}}$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$

พิสูจน์ เนื่องจาก L_n เป็นด้านตรงข้ามมุมฉากของรูปสามเหลี่ยม $F_n OF_{n+1}$

$$\text{ดังนั้น } |L_n| = \sqrt{F_n^2 + F_{n+1}^2} \quad (1)$$

และจากความรู้พื้นฐาน (ทฤษฎีบท 2.1) $F_{2n-1} = F_n^2 + F_{n-1}^2$ แทนค่า n ด้วย $n+1$

$$\text{จะได้ว่า } F_{2(n+1)-1} = F_{n+1}^2 + F_{(n+1)-1}^2$$

$$\text{ดังนั้น } F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + F_n^2 \quad (2)$$

$$\text{จากสมการ (1) และ (2) จะได้ว่า } |L_n| = \sqrt{F_{2n+1}} \quad \square$$

จากการพิสูจน์ข้างต้นทำให้เราได้เป็นทฤษฎีบท ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 4.1 ความยาวของ L_n เท่ากับรากที่สองของจำนวนฟีโบนัชชีตัวที่ $2n+1$ กล่าวคือ

$$|L_n| = \sqrt{F_{2n+1}} \text{ สำหรับทุก } n \in \mathbb{N}$$

ตัวอย่าง 4.1 จงหาความยาวของ L_1, L_3 และ L_6

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ } |L_1| &= \sqrt{F_{2(1)+1}} = \sqrt{F_3} = \sqrt{2} \approx 1.41, |L_3| = \sqrt{F_{2(3)+1}} = \sqrt{F_7} = \sqrt{13} \approx 3.61 \\ |L_6| &= \sqrt{F_{2(6)+1}} = \sqrt{F_{13}} = \sqrt{233} \approx 15.26 \end{aligned}$$

จะสังเกตว่าการหา $|L_n|$ โดยใช้ทฤษฎีบท 4.1 จำเป็นจะต้องใช้จำนวนฟีโบนัชชีตัวที่ $2n+1$ เช่น ถ้าต้องการหา $|L_{100}|$ เราจำเป็นต้องหา $F_{2(100)+1} = F_{201}$ จำนวนฟีโบนัชชีตัวที่ 201 ซึ่งเป็นงานที่ต้องใช้เวลามากจากการใช้ความสัมพันธ์แบบเวียนเกิดตามบทนิยามของจำนวนฟีโบนัชชี บทแทรกต่อไปนี้จะช่วยให้เราสามารถหา $|L_n|$ ได้สะดวกมากขึ้นจากสูตรรูปแบบปิด (Closed form formula)

$$\text{บทแทรก 4.1 } |L_n| = \left(\frac{\varphi^{2n+1} - (1-\varphi)^{2n+1}}{\sqrt{5}} \right)^{\frac{1}{2}} \text{ เมื่อ } \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618033988749895...$$

$$\text{พิสูจน์} \text{ จากความรู้พื้นฐาน (ทฤษฎีบท 2.2) จะได้ว่า } F_n = \frac{\varphi^n - (1-\varphi)^n}{\sqrt{5}}$$

$$\text{ดังนั้น } F_{2n+1} = \frac{\varphi^{2n+1} - (1-\varphi)^{2n+1}}{\sqrt{5}} \text{ นั่นคือ } |L_n| = \sqrt{F_{2n+1}} = \left(\frac{\varphi^{2n+1} - (1-\varphi)^{2n+1}}{\sqrt{5}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \square$$

ตัวอย่าง 4.2 จงหาความยาวของ L_5 และ L_{50}

วิธีทำ $|L_5| = \left(\frac{\varphi^{11} - (1-\varphi)^{11}}{\sqrt{5}} \right)^{\frac{1}{2}} \approx 9.43, |L_{50}| = \left(\frac{\varphi^{101} - (1-\varphi)^{101}}{\sqrt{5}} \right)^{\frac{1}{2}} \approx 23,940,506,344.14$

โปรแกรมคำนวณความยาวก้นหอยฟีโบนัชชีบนระนาบพิกัดฉาก

เป้าหมายต่อไปของเราคือการคำนวณหาความยาวรวมของก้นหอยฟีโบนัชชีตั้งแต่ L_1 ถึง L_n หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งคือการหา $\sum_{i=1}^n |L_i| = |L_1| + |L_2| + |L_3| + \dots + |L_n|$ ซึ่งสามารถทำได้โดยการนำสูตรในทฤษฎีบท 4.1 หรือบทแทรก 4.1 มาเขียนโปรแกรมเพื่อช่วยในการคำนวณ ได้ดังต่อไปนี้

```
# โปรแกรมจากทฤษฎีบท 4.1
import math

def fibonacci(n):
    if n <= 0:
        return 0
    elif n == 1:
        return 1
    else:
        a, b = 0, 1
        for _ in range(n - 1):
            a, b = b, a + b
        return b

def calculate_length(n):
    return math.sqrt(fibonacci(2 * n + 1))

def sum_length(n1, n2):
    total = sum(calculate_length(n) for n in range(n1, n2 + 1))
    return total

print("ป้อนค่า n1 และ n2 (จำนวนนับ) เพื่อคำนวณผลรวมความยาวของเส้น L{n1} ถึง L{n2}:")
while True:
    try:
        n1 = int(input("n1: "))
        n2 = int(input("n2: "))
        if n1 <= 0 or n2 <= 0 or n1 > n2:
            print("กรุณาป้อนค่า n1 และ n2 ที่ถูกต้อง (n1 <= n2 และเป็นจำนวนนับ)")
            continue

        total_length = sum_length(n1, n2)
        print(f"ผลรวมของความยาวเส้น L{n1} ถึง L{n2}: {total_length:.6f}")
        break
    except ValueError:
        print("กรุณาป้อนเลขจำนวนเต็มที่ถูกต้อง")
```

```
# โปรแกรมจากบทแทรก 4.1
import math

def calculate_length(n):
    phi = (1 + math.sqrt(5)) / 2 # ค่าฟี
    return math.sqrt((phi**(2*n + 1) - (1 - phi)**(2*n + 1)) / math.sqrt(5))

def sum_length(n1, n2):
    total = sum(calculate_length(n) for n in range(n1, n2 + 1))
    return total

print("ป้อนค่า n1 และ n2 (จำนวนนับ) เพื่อคำนวณผลรวมความยาวของเส้น L{n1} ถึง L{n2}:")
while True:
    try:
        n1 = int(input("n1: "))
        n2 = int(input("n2: "))
        if n1 <= 0 or n2 <= 0 or n1 > n2:
            print("กรุณาป้อนค่า n1 และ n2 ที่ถูกต้อง (n1 <= n2 และเป็นจำนวนนับ)")
            continue

        total_length = sum_length(n1, n2)
        print(f"ผลรวมของความยาวเส้น L{n1} ถึง L{n2}: {total_length:.6f}")
        break
    except ValueError:
        print("กรุณาป้อนเลขจำนวนเต็มที่ถูกต้อง")
```

ป้อนค่า n1 และ n2 (จำนวนนับ) เพื่อคำนวณผลรวมความยาวของเส้น L{n1} ถึง L{n2}:
n1: 1
n2: 5
ผลรวมของความยาวเส้น L1 ถึง L5: 22.520766

ป้อนค่า n1 และ n2 (จำนวนนับ) เพื่อคำนวณผลรวมความยาวของเส้น L{n1} ถึง L{n2}:
n1: 5
n2: 10
ผลรวมของความยาวเส้น L5 ถึง L10: 258.642765




รูปที่ 4.2 โปรแกรมคำนวณความยาวก้นหอยฟีโบนัชชีบนระนาบพิกัดฉาก

จากทฤษฎีบท 4.1 ทำให้เราสามารถหาค่าของ $|L_n|$ จากกรณีที่สองของ F_{2n+1} และเมื่อเราลองหาผลหาร $\frac{|L_{n+1}|}{|L_n|}$ ทำให้พบแบบรูปที่น่าสนใจ กล่าวคือ

$$\frac{|L_2|}{|L_1|} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{5}{2}} \approx 1.5811388300, \frac{|L_3|}{|L_2|} = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{13}{5}} \approx 1.6124515496$$

$$\frac{|L_4|}{|L_3|} = \frac{\sqrt{34}}{\sqrt{13}} = \sqrt{\frac{34}{13}} \approx 1.6172150801, \frac{|L_5|}{|L_4|} = \frac{\sqrt{89}}{\sqrt{34}} = \sqrt{\frac{89}{34}} \approx 1.6179144164$$

จะพบว่าผลหารดังกล่าวน่าจะมีค่าลู่เข้าสู่ค่า $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618033988749895...$ เมื่อ n มีค่าเพิ่มขึ้น ทำให้เราได้ข้อความคาดการณ์ ดังต่อไปนี้

ข้อความคาดการณ์ 4.2 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|L_{n+1}|}{|L_n|} = \varphi$

พิสูจน์ จากทฤษฎีบท 4.1 $|L_n| = \sqrt{F_{2n+1}}$ จะได้ว่า

$$\frac{|L_{n+1}|}{|L_n|} = \frac{\sqrt{F_{2(n+1)+1}}}{\sqrt{F_{2(n)+1}}} = \sqrt{\frac{F_{2n+3}}{F_{2n+1}}} = \sqrt{\frac{F_{2n+1} + F_{2n+2}}{F_{2n+1}}} = \sqrt{1 + \frac{F_{2n+2}}{F_{2n+1}}}$$

$$\text{ดังนั้น } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|L_{n+1}|}{|L_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{F_{2n+2}}{F_{2n+1}}} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{F_{2n+2}}{F_{2n+1}}\right)} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{2n+2}}{F_{2n+1}}} = \sqrt{1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n}}$$

จากความรู้พื้นฐาน (ทฤษฎีบท 2.3 และ 2.4) จะได้ว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi$ และ $1 + \varphi = \varphi^2$ ดังนั้น

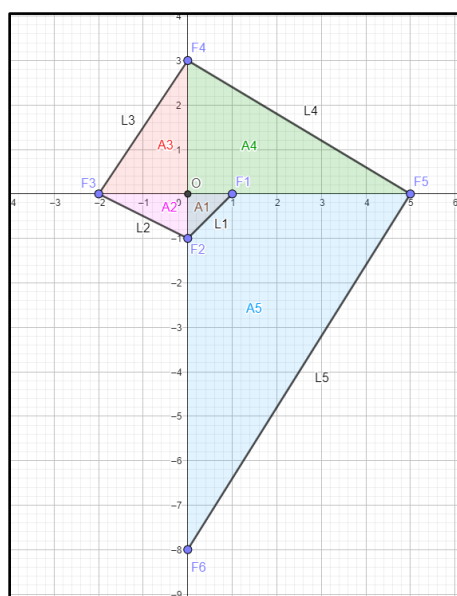
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|L_{n+1}|}{|L_n|} = \sqrt{1 + \varphi} = \sqrt{\varphi^2} = \varphi$$

□

จากการพิสูจน์ข้างต้นทำให้เราสรุปได้ว่าอัตราส่วนระหว่างความยาวของเส้นที่อยู่ติดกัน คือ

$\frac{|L_{n+1}|}{|L_n|}$ จะลู่เข้าสู่อัตราส่วนทองเมื่อ $n \rightarrow \infty$ ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 4.2 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|L_{n+1}|}{|L_n|} = \varphi$ เมื่อ $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618033988749895...$



รูปที่ 4.3 รูปสามเหลี่ยมมุมฉากในก้นหอยฟีโบนัชชี

ในลำดับต่อไปเราจะพิจารณาอัตราส่วนของพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากในลำดับติดกันของกันหอยฟีโบนัชชี โดยกำหนดให้ A_n แทนพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมรูปที่ n ดังรูปที่ 4.3 ซึ่งจากการสังเกตในเบื้องต้นจะพบว่า

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{\frac{1}{2} \times F_2 \times F_3}{\frac{1}{2} \times F_1 \times F_2} = \frac{F_3}{F_1} = \frac{2}{1} = 2, \quad \frac{A_3}{A_2} = \frac{\frac{1}{2} \times F_3 \times F_4}{\frac{1}{2} \times F_2 \times F_3} = \frac{F_4}{F_2} = \frac{3}{1} = 3$$

$$\text{ในทำนองเดียวกันจะได้ว่า } \frac{A_4}{A_3} = 2.5000, \frac{A_5}{A_4} = 2.66666, \frac{A_6}{A_5} = 2.6000, \frac{A_7}{A_6} = 2.6250$$

ซึ่งจะพบว่าผลหารดังกล่าวมีค่าเป็นลำดับกวดแก้วที่น่าจะลู่เข้าสู่ $1 + \varphi \approx 2.618033\dots$ เมื่อ n มีค่าเพิ่มขึ้น ทำให้เราได้ข้อความคาดการณ์ ดังต่อไปนี้

ข้อความคาดการณ์ 4.3 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_{n+1}}{A_n} = 1 + \varphi = \varphi^2$

พิสูจน์ เนื่องจาก $\frac{A_{n+1}}{A_n} = \frac{\frac{1}{2} \times F_{n+1} \times F_{n+2}}{\frac{1}{2} \times F_n \times F_{n+1}} = \frac{F_{n+2}}{F_n} = \frac{F_n}{F_n} + \frac{F_{n+1}}{F_n} = 1 + \frac{F_{n+1}}{F_n}$

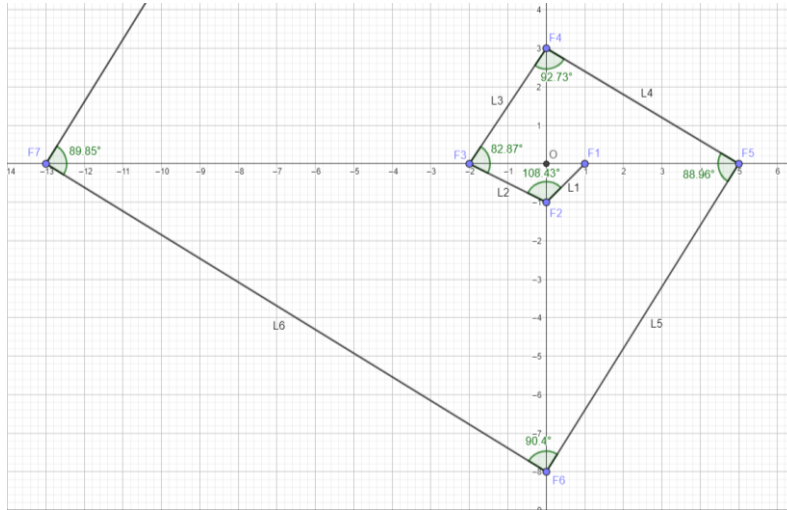
$$\text{ดังนั้น } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_{n+1}}{A_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{F_{n+1}}{F_n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = 1 + \varphi = \varphi^2$$

$$\text{ดังนั้น } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_{n+1}}{A_n} = 1 + \varphi = \varphi^2 \quad \square$$

จากการพิสูจน์ข้างต้นทำให้เราสรุปได้ว่าเมื่อ $n \rightarrow \infty$ อัตราส่วนของพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม $\frac{A_{n+1}}{A_n}$ จะลู่เข้าสู่กำลังสองของอัตราส่วนทอง ทำให้สามารถสรุปได้เป็นดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 4.3 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_{n+1}}{A_n} = 1 + \varphi = \varphi^2$

ในลำดับต่อไปเราจะพิจารณาขนาดของมุมที่เส้น L_n ทำกับเส้น L_{n+1} เมื่อ $n \rightarrow \infty$ ซึ่งจากการสำรวจโดยใช้โปรแกรม GeoGebra ดังรูปที่ 4.4 จะพบว่าขนาดของมุมระหว่างเส้นที่อยู่ติดกันมีลักษณะเป็นลำดับกวดแก้วที่น่าจะลู่เข้าสู่ 90° ทำให้เราได้ข้อความคาดการณ์ ดังต่อไปนี้



รูปที่ 4.4 มุมระหว่างส่วนของเส้นตรงที่อยู่ติดกันในก้นหอยฟีโบนัชชี

ข้อความคาดการณ์ 4.4 L_n ตั้งฉากกับ L_{n+1} เมื่อ $n \rightarrow \infty$

พิสูจน์ ให้ mL_n แทนความชันของเส้น L_n และ mL_{n+1} แทนความชันของเส้น L_{n+1}
กรณี L_n อยู่ในจตุภาคที่ 4 จะได้ว่า L_n เชื่อมจุด $(F_n, 0)$ กับ $(0, -F_{n+1})$ และ L_{n+1} เชื่อมจุด $(0, -F_{n+1})$ กับ $(-F_{n+2}, 0)$ ดังนั้น

$$mL_n = \frac{-F_{n+1} - 0}{0 - F_n} = \frac{F_{n+1}}{F_n} \text{ และ } mL_{n+1} = \frac{0 + F_{n+1}}{-F_{n+2} - 0} = -\frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}$$

ดังนั้นความชันของเส้นตรง L_n เมื่อ $n \rightarrow \infty$ คือ $\lim_{n \rightarrow \infty} mL_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \phi$

และความชันของเส้นตรง L_{n+1} เมื่อ $n \rightarrow \infty$ คือ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} mL_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{F_{n+1}}{F_{n+2}} \right) = -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_{n+2}} = -\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\frac{F_{n+2}}{F_{n+1}}} \right) = -\left(\frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}}} \right) = -\frac{1}{\phi}$$

ทำให้ได้ว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} mL_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} mL_{n+1} = (\phi) \cdot \left(-\frac{1}{\phi} \right) = -1$ นั่นคือ L_n ตั้งฉากกับ L_{n+1} เมื่อ $n \rightarrow \infty$

กรณีที่ L_n อยู่ในจตุภาคที่ 1, 2 และ 3 สามารถแสดงได้ในทำนองเดียวกัน □

จากการพิสูจน์ข้างทำให้เราสรุปได้ว่าเมื่อ $n \rightarrow \infty$ เส้นตรง L_n จะตั้งฉากกับเส้นตรง L_{n+1}
ทำให้สามารถสรุปได้เป็นดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 4.4 L_n ตั้งฉากกับ L_{n+1} เมื่อ $n \rightarrow \infty$

บทแทรก 4.2 L_n ขนานกับ L_{n+2} เมื่อ $n \rightarrow \infty$

พิสูจน์ จากทฤษฎีบท 4.4 จะได้ว่า ถ้า $n \rightarrow \infty$ แล้ว L_n ตั้งฉากกับ L_{n+1} และ L_{n+1} ตั้งฉากกับ L_{n+2} เนื่องจากเส้นที่ตั้งฉากกับเส้นเดียวกันย่อมขนานกัน ดังนั้นจึงได้ว่า L_n ขนานกับ L_{n+2} □

บทที่ 5

สรุปอภิปรายผลการดำเนินการ และข้อเสนอแนะ

5.1 สรุปผลการดำเนินการ

โครงการ “ก้นหอยฟีโบนัชชีบนระนาบพิกัดฉาก: จินตนาการจากกราฟสู่ความยาวอนันต์ และอัตราส่วนทอง” เริ่มต้นจากคำถามเล็ก ๆ ว่า “จะเกิดอะไรขึ้น หากเรานำจำนวนฟีโบนัชชีไปกำหนดเป็นจุดแบบหมุนวนไปเรื่อย ๆ ในระนาบพิกัดฉาก แล้วลากเส้นเชื่อมตามลำดับ?” จากคำถามดังกล่าว ได้กลายเป็นเส้นทางของการค้นพบที่น่าทึ่ง ผู้จัดทำได้ศึกษาความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับจำนวนฟีโบนัชชีและหลักการทางเรขาคณิตบนระนาบพิกัดฉาก แล้วสร้างรูปเรขาคณิตโดยการลากเส้นตรงระหว่างจุดฟีโบนัชชีบนแกน X และ Y แบบหมุนวนในทิศทางวนรอบแบบไม่ที่สิ้นสุด ผลที่ได้ไม่ใช่เพียงแค่รูปเรขาคณิตที่ชวนสะดุดตา แต่เป็นปรากฏการณ์ทางคณิตศาสตร์ที่แฝงด้วยโครงสร้างที่ลึกซึ้ง ทั้งในเชิงความยาว อัตราส่วน พื้นที่ และมุม ซึ่งในโครงการนี้เราตั้งชื่อรูปเรขาคณิตนี้ว่า “รูปก้นหอยฟีโบนัชชีบนระนาบพิกัดฉาก”

จากการสังเกตเชิงรูปธรรม ผู้การจัดตั้งข้อความคาดการณ์ในเชิงของความเป็นอนันต์ และต่อยอดด้วยการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ผู้จัดทำสามารถแสดงให้เห็นว่า ความยาวของเส้นแต่ละเส้นในก้นหอยสามารถแสดงเป็นรากที่สองของจำนวนฟีโบนัชชีที่แน่นอนตัวหนึ่งในลำดับ และเมื่อขยายจำนวนมากขึ้นอัตราส่วนระหว่างความยาวของเส้นที่อยู่ติดกันจะลู่เข้าสู่ “อัตราส่วนทอง” ทั้งยังพิสูจน์ได้ว่าส่วนของเส้นตรงในลำดับนี้ที่อยู่ติดกันมีแนวโน้มตั้งฉากกัน และขนานกันในลำดับห่างกันสองตำแหน่ง นอกจากนี้ ผู้จัดทำยังได้พัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์อย่างง่ายที่สามารถคำนวณค่าความยาวของเส้นที่ n รวมถึงความยาวรวมของเส้นที่หมุนวนเป็นก้นหอย ซึ่งสะท้อนถึงการบูรณาการคณิตศาสตร์กับเทคโนโลยีได้อย่างชัดเจน

5.2 อภิปรายผล

สิ่งที่โครงการนี้แสดงให้เห็นชัดเจนคือ “คณิตศาสตร์ไม่ใช่เพียงวิชาในตำรา แต่คือภาษาที่ธรรมชาติใช้ในการออกแบบตัวมันเอง” จากเส้นตรงธรรมดา ที่เชื่อมต่อกัน ทำให้เราได้ค้นพบความลึกซึ้งของรูปเรขาคณิตที่ไม่มีที่สิ้นสุด ผ่านการสังเกต ตั้งคำถาม และการค้นหาความหมายที่ซ่อนอยู่ในสิ่งเรียบง่าย รูปก้นหอยที่เกิดขึ้นจากจำนวนฟีโบนัชชีไม่ใช่เพียงการลากเส้นต่อกัน แต่คือภาพแทนของการเติบโต อัตราส่วนที่ลงตัว ความสัมพันธ์ที่สมดุล และความสวยงามที่มีอยู่ในโครงสร้าง

ของความเป็นอนันต์ ผลการพิสูจน์และแบบจำลองที่พัฒนาได้นี้ นอกจากให้ความเข้าใจในระดับทฤษฎีแล้ว ในอนาคตอาจเป็นส่วนหนึ่งที่สามารถต่อยอดไปสู่การใช้งานจริง เช่น การสร้างแบบจำลองตาข่ายหมุนหรือกาแล็กซี การออกแบบองค์ประกอบทางศิลปะตามอัตราส่วนของเพื่อให้เกิดสัดส่วนที่รู้สึกสมดุลโดยธรรมชาติการรับรู้ของมนุษย์ ผลจากโครงการนี้อาจจะสามารถต่อยอดไปสู่การออกแบบที่มีความ “แม่นยำเชิงคณิตศาสตร์” และที่สำคัญที่สุดคือในมิติของผู้เรียน โครงการนี้เป็นเวทีของการเรียนรู้แบบครบวงจร ตั้งแต่การสังเกต วิเคราะห์ พิสูจน์ คิดสร้างสรรค์ ไปจนถึงการใช้เทคโนโลยีเพื่อแสดงผล ในทุกขั้นตอนเป็นแรงขับให้ผู้จัดทำไม่เพียงเข้าใจคณิตศาสตร์ที่ได้เรียนรู้ในห้องเรียนมากขึ้นเท่านั้น แต่ได้รู้สึกกับมันอย่างแท้จริง

สิ่งที่น่าสนใจที่สุดอย่างหนึ่งที่โครงการนี้ค้นพบคือ เมื่อเรากำนวณอัตราส่วนของความยาวเส้นตรงที่อยู่ติดกันในก้นหอยฟีโบนัชชี นั่นคือ $\frac{L_{n+1}}{L_n}$ เราจะพบว่าค่าดังกล่าวจะเข้าใกล้ค่าคงที่อย่างหนึ่งมากขึ้นเรื่อย ๆ เมื่อ $n \rightarrow \infty$ ค่าคงที่นั้นคืออัตราส่วนของ หรือ $\phi = 1.618033988749895...$ อัตราส่วนของไม่ใช่เพียงตัวเลขสวย ๆ ในทางคณิตศาสตร์ แต่คือปรากฏการณ์ทางธรรมชาติที่ปรากฏอยู่ในดอกไม้ เปลือกหอย กาแล็กซี แม้แต่ในสัดส่วนของร่างกายมนุษย์ โครงการนี้ได้เสนอตัวอย่างที่ตอกย้ำว่าธรรมชาติตั้งอยู่บนหลักแห่งคณิตศาสตร์ ดังคำกล่าวของ กาลิเลโอ ที่ว่า “Nature is written in mathematical language” (The Galileo Project, 2024)"

อีกหนึ่งปรากฏการณ์ที่น่าสนใจของข้อค้นพบในโครงการนี้คือ การตั้งฉากของเส้น L_n กับ L_{n+1} เมื่อพิจารณาความชันของแต่ละเส้นในลำดับ เราจะพบว่า เมื่อ $n \rightarrow \infty$ ผลคูณความชันของ L_n และ L_{n+1} มีค่าเข้าใกล้ -1 ซึ่งในเรขาคณิตมันแปลว่าเส้นทั้งสองเส้นตั้งฉากกัน การตั้งฉากที่เกิดขึ้นนี้ไม่ใช่เพียงปรากฏการณ์เชิงเรขาคณิตธรรมดา แต่มันเป็นจังหวะหมุนที่สร้าง “รูปเรขาคณิตที่เติบโตอย่างสมดุล” ได้อย่างสมบูรณ์แบบ ความน่าสนใจของมันอยู่ที่ว่าแม้ความยาวของเส้นจะเพิ่มขึ้นอย่างไร้ขีดจำกัด แต่ไม่เคยสูญเสียสมดุลทางมุมของมันเลยสิ่งนี้สื่อถึงหลักของ “ความเป็นอนันต์ที่มีระเบียบ” ซึ่งเป็นคุณสมบัติสำคัญที่นักคณิตศาสตร์ตามหาในโครงสร้างของสิ่งที่ศึกษา ผลจากโครงการนี้ไม่เพียงเป็นผลสำเร็จทางทฤษฎีเชิงคณิตศาสตร์เท่านั้น แต่ในอนาคตอาจจะสามารถขยายไปสู่การใช้งานจริงได้หลากหลายศาสตร์ ทั้งวิทยาศาสตร์ธรรมชาติ การออกแบบ สถาปัตยกรรม และเทคโนโลยี

5.3 ข้อเสนอแนะ

ข้อเสนอแนะในการนำผลการทำโครงการไปใช้ประโยชน์

1. นำผลจากการทำโครงการในครั้งนี้ไปเป็นแบบจำลองพื้นฐาน ในการศึกษารูปแบบการหมุนและการขยายในธรรมชาติ เช่น ตาพายุ กาแล็กซี หรือรูปแบบการจัดเรียงของเกสรดอกไม้
2. นำรูปแบบสัดส่วนของความยาวที่เข้าสู่อัตราส่วนทองไปประยุกต์ใช้ในการออกแบบสื่อหรือผลงานศิลปะ เช่น การวางองค์ประกอบภาพถ่าย หรือหน้าปกสิ่งพิมพ์ ที่มีความสมดุลทางสายตา

ข้อเสนอแนะสำหรับการทำโครงการครั้งต่อไป

- 2.1 ควรขยายโครงการไปสู่การทดลองลากเส้นเชื่อมจำนวนฟีโบนัชชีใน 3 มิติ เช่น ในระบบพิกัดเชิงทรงกระบอกหรือทรงกลม เพื่อดูว่ารูปแบบที่เกิดขึ้นมีความสัมพันธ์กับธรรมชาติใดบ้าง
- 2.2 ควรศึกษาในกรณีของการเปลี่ยนรูปแบบการหมุนหรือการจัดวางจุด เช่น สลับการหมุนตามหรือทวนเข็มนาฬิกา เพื่อเปรียบเทียบว่าเกิดเป็นรูปใด และมีความเป็นระเบียบที่แตกต่างจากเดิมหรือไม่

เอกสารอ้างอิง

1. สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2565). หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เล่ม 2. สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี.
2. สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2565). หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เล่ม 2. สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี.
3. วิกีพีเดีย. (2567). จำนวนฟีโบนัชชี. สืบค้นเมื่อ 25 พฤศจิกายน 2567, จาก <https://th.wikipedia.org/wiki/จำนวนฟีโบนัชชี>
4. Eggar, M. H. (1979). *Applications of Fibonacci numbers*. Mathematical Gazette, 63(423), 36–39.
5. Omotehinwa, T. O., & Ramon, S. O. (2013). Fibonacci numbers and golden ratio in mathematics and science. International Journal of Computer and Information Technology, 2(4), 630-638.
6. The Galileo Project (2024). Stanford Encyclopedia of Philosophy, *Galileo Galilei*. Retrieved November 12, 2025, from <https://plato.stanford.edu/entries/galileo/>