



โครงการคณิตศาสตร์

ไขรหัสลับความสัมพันธ์เชิงพื้นที่ระหว่างพื้นที่ใต้กราฟฮิสโทแกรม
และพื้นที่สี่เหลี่ยมคางหมูมุมฉาก

โดย

1. เด็กหญิงพิมพ์นารา ขาวมรดก
2. เด็กหญิงวิพรภัทร์ ศักดิ์คุณาพงศ์
3. เด็กหญิงอริสา วรรณเผือก

ครูที่ปรึกษา 1. นางสาวเบญจมาศ คงตระกูล
2. นางสาวพรชนก ช่วยสุข

โรงเรียนสอาดเผดิมวิทยา

สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษาสุราษฎร์ธานีชุมพร

รายงานฉบับนี้เป็นส่วนประกอบของโครงการคณิตศาสตร์

ประเภททฤษฎี ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น ช่วงชั้นที่3

โครงการคณิตศาสตร์

ไขรหัสลับความสัมพันธ์เชิงพื้นที่อิสโตแกรมและสี่เหลี่ยมคางหมู

โดย

1. เด็กหญิงพิมพ์นารา ขาวมรดก
2. เด็กหญิงวิพรภัทร์ ศักดิ์คุณาพงศ์
3. เด็กหญิงอริสา วรรณเผือก

ครูที่ปรึกษา 1. นางสาวเบญจมาศ คงตระกูล
2. นางสาวพรชนก ช่วยสุข

โรงเรียนสอาดเผดิมวิทยา

สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษาสุราษฎร์ธานีชุมพร

รายงานฉบับนี้เป็นส่วนประกอบของโครงการคณิตศาสตร์

ประเภททฤษฎี ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น

บทคัดย่อ

โครงการคณิตศาสตร์โครทส์ลับความสัมพันธ์เชิงพื้นที่ฮิสโทแกรมและสี่เหลี่ยมคางหมูโดยมีวัตถุประสงค์ดังนี้ 1.เพื่อหาห้สลับความสัมพันธ์เชิงพื้นที่ฮิสโทแกรม และสี่เหลี่ยมคางหมูจากการหาพื้นที่ใต้ฮิสโทแกรมที่เป็นรูปพื้นที่สี่เหลี่ยมคางหมูมุมฉากและการแก้สมการกำลังสองตัวแปรเดียว 2.เพื่อตรวจสอบคำตอบโครทส์ลับความสัมพันธ์เชิงพื้นที่ฮิสโทแกรมและสี่เหลี่ยมคางหมู ด้วยโปรแกรม GSP ผลการดำเนินโครงการพบว่า จากความสัมพันธ์ของข้อมูลที่มีความถี่เพิ่มขึ้นจากข้อมูลตัวแรกเป็นร้อยละที่มีค่าแน่นอนและเพิ่มขึ้นเท่ากันของข้อมูลตัวถัดไปทำให้พบว่า เมื่อนำเสนอข้อมูลด้วยฮิสโทแกรมจะทำให้พื้นที่ใต้ฮิสโทแกรมเป็นพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมคางหมูมุมฉาก จากข้อสังเกตนี้เป็นจุดเริ่มต้นในการหาความสัมพันธ์ของตัวแปรต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องนำไปสู่การคำนวณหาสูตรการโครทส์ลับความสัมพันธ์เชิงพื้นที่ฮิสโทแกรมและสี่เหลี่ยมคางหมู ด้วยสูตรพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมคางหมูมุมฉากและการแก้สมการกำลังสองตัวแปรเดียว เมื่อดำเนินการตรวจสอบสูตรลับโครทส์ลับความสัมพันธ์เชิงพื้นที่ฮิสโทแกรมและสี่เหลี่ยมคางหมู ด้วยโปรแกรมGSPพบว่าในการตรวจสอบคำตอบสูตรโครทส์ลับความสัมพันธ์เชิงพื้นที่ฮิสโทแกรมและสี่เหลี่ยมคางหมู ได้ผลลัพธ์ที่ถูกต้อง ทำให้ทราบว่าจากการหาความสัมพันธ์ของตัวแปรต่าง ๆ โดยใช้สูตรการหาพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมคางหมูมุมฉากและการแก้สมการกำลังสองตัวแปรเดียวทำให้ได้ สูตรโครทส์ลับความสัมพันธ์เชิงพื้นที่ฮิสโทแกรมและสี่เหลี่ยมคางหมู เป็นสูตรทางคณิตศาสตร์ที่ถูกต้องและสามารถนำไปใช้ได้จริง ดังสูตร ต่อไปนี้

กำหนดให้ y_1 แทนค่าของข้อมูลตัวที่ 1 A แทนผลรวมของข้อมูลทั้งหมด
 n แทนจำนวนงวด p แทนร้อยละของค่าที่เพิ่มขึ้นของข้อมูลตัวที่ 1

โดยที่ $y_n = y_1 + (n - 1) \cdot py_1$

โครทส์ลับความสัมพันธ์เชิงพื้นที่ฮิสโทแกรมและสี่เหลี่ยมคางหมู $A = \frac{1}{2} \times (2y_1 + (n - 1) \cdot py_1) \times n$

$$\therefore n = \frac{-(2y_1 - py_1) \pm \sqrt{(2y_1 - py_1)^2 + 8py_1A}}{2 \cdot py_1} \quad \text{โดยที่ ค่า } n \geq 0$$

คณะผู้จัดทำ

กิตติกรรมประกาศ

โครงการคณิตศาสตร์ไชรส์ลับความสัมพันธ์เชิงพื้นที่ฮิสโตแกรมและสี่เหลี่ยมคางหมู โดยมีคุณครูเบญจมาศ คงตระกูล และคุณครูพรชนก ช่วยสุข เป็นครูที่ปรึกษา ให้คำแนะนำข้อมูลในการจัดทำโครงการคณิตศาสตร์ และสถานที่ในการจัดทำโครงการคณิตศาสตร์เป็นอย่างดี ขอขอบพระคุณท่านผู้อำนวยการ นายไกรวัลย์ สังฆะสา และคุณครูทุกท่านในกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ โรงเรียนสอาดเผดิมวิทยา ที่ให้กำลังใจ สอนสั่ง และให้ความรู้ จนทำให้เกิดความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์ สามารถจัดทำโครงการคณิตศาสตร์ได้

คณะผู้จัดทำจึงขอขอบพระคุณมา ณ โอกาสนี้ หากมีข้อผิดพลาดประการใด คณะผู้จัดทำต้องขออภัยไว้ ณ ที่นี้ด้วย

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อ	ก
กิตติกรรมประกาศ	ข
สารบัญ	ค
สารบัญตาราง	ง
สารบัญรูปภาพ	จ
บทที่ 1 บทนำ	1
บทที่ 2 เอกสารที่เกี่ยวข้อง	3
บทที่ 3 วิธีการดำเนินการ	8
บทที่ 4 ผลการดำเนินการ	15
บทที่ 5 สรุป อภิปราย และข้อเสนอแนะ	17
บรรณานุกรม	19
ภาคผนวก	20

สารบัญตาราง

ตารางที่	หน้า
1	ปฏิทินแสดงการปฏิบัติงาน 7
2	การจำลองสถานการณ์ข้อมูลที่มีความถี่ของข้อมูล เพิ่มขึ้นจากข้อมูลก่อนหน้าที่ละ 10 8
3	แสดงข้อมูลที่ได้จากการใช้โปรแกรม GSP คำนวณตามสูตรการไรห้สลับความสัมพันธ์เชิงพื้นที่ฮิสโตแกรมและสี่เหลี่ยมคางหมู 15

สารบัญรูปภาพ

ภาพที่	หน้า
ภาพที่ 1 แสดงตัวอย่างการนำเสนอข้อมูลด้วยฮิสโทแกรม	3
ภาพที่ 2 แสดงโปรแกรม The Geometer's Sketchpad หรือ GSP	7
ภาพที่ 3 แสดงฮิสโทแกรมแสดงข้อมูลความถี่ที่กำหนดขึ้นจากการจำลองสถานการณ์	10
ภาพที่ 4 แสดงการใช้โปรแกรม GSP ในการตรวจสอบคำตอบไขรหัสลับความสัมพันธ์เชิงพื้นที่ฮิสโตแกรมและ สี่เหลี่ยมคางหมู	13
ภาพที่ 5 แสดงการใช้โปรแกรม GSP ในการตรวจสอบคำตอบไขรหัสลับความสัมพันธ์เชิงพื้นที่ฮิสโตแกรมและ สี่เหลี่ยมคางหมู	14

บทที่ 1 บทนำ

1.1 ที่มาและความสำคัญของโครงการ

คณิตศาสตร์เป็นวิชาหนึ่งในกลุ่มทักษะเป็นเครื่องมือในการเรียนรู้ ช่วยพัฒนาคนให้รู้จักคิดแบบมีเหตุผล มีระเบียบขั้นตอนในการคิด สามารถแก้โจทย์ปัญหาได้ นอกจากนั้นยังช่วยเสริมสร้างคุณลักษณะที่จำเป็นต่อการดำรงชีวิตอื่นๆ เช่น การสังเกต ความละเอียด ถี่ถ้วน แม่นยำ มีสมาธิและรู้จักแก้ปัญหา โดยเฉพาะอย่างยิ่งในชีวิตประจำวัน เราต้องใช้ความรู้ และทักษะทางคณิตศาสตร์เกือบตลอดเวลา เช่น การประมาณค่า การซื้อขาย การดูเวลา การชั่ง การตวง การวัด รูปทรงสิ่งของเครื่องใช้และอื่นๆ อีกมากที่เกี่ยวข้องกับจำนวน ตัวเลข และเรขาคณิต กล่าวได้ว่า คณิตศาสตร์เป็นวิชาทักษะที่สำคัญ และสัมพันธ์กับชีวิตประจำวันเป็นอย่างมาก

วิชาคณิตศาสตร์ไม่ใช่แค่เรื่องของโจทย์ในท้องเรียน แต่เป็น **"ทักษะชีวิต"** ที่ใช้ในการตัดสินใจทุกวัน ตั้งแต่การเปรียบเทียบราคาซื้อของ, การคำนวณส่วนลด, ค่าใช้จ่าย, การเก็บออม ไปจนถึงการตัดสินใจเลือกซื้อประกันหรือลงทุนในกองทุน เงินเป็นปัจจัยสำคัญในการดำรงชีวิตที่มีความสำคัญอย่างยิ่งในยุคปัจจุบัน ความรู้ทางคณิตศาสตร์คือเครื่องมือสำคัญในการจัดการเรื่องการเงินการลงทุนเหล่านั้นได้อย่างมีประสิทธิภาพ ในปัจจุบันโลกมีความเจริญทางเทคโนโลยี มีอาชีพมากมายที่เปิดโอกาสช่องทางในการทำงานหาเงิน ไม่จำกัดอายุ เพศหรือวัย ด้วยปัจจัยของความเจริญทางเทคโนโลยีที่เปิดโอกาสให้ผู้คนได้เข้าถึงการลงทุนในรูปแบบต่าง ๆ ธุรกิจต่าง ๆ ทำให้เกิดเศรษฐีอายุน้อยร้อยล้านเป็นจำนวนมาก ซึ่งความร่ำรวย ความมั่นคงทางการเงินเป็นความใฝ่ฝันของใครหลายคน การออมเงินให้ถึงเงินล้านจึงเป็นล้านแรกที่มีความหมายต่อการต่อยอดให้เป็นจำนวนหลายล้านต่อไปในอนาคต ซึ่งการมีเงินล้านเป็นความใฝ่ฝันของคณะผู้ดำเนินโครงการด้วยเช่นกัน

จากการศึกษาวิชาคณิตศาสตร์ในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 คณะผู้ดำเนินโครงการมีความสนใจในเรื่องการนำเสนอข้อมูลด้วยฮิสโทแกรม ซึ่งมีลักษณะคล้ายแผนภูมิแท่ง แต่ใช้แท่งสี่เหลี่ยมมุมฉากแสดงความถี่หรือความถี่สัมพันธ์ของข้อมูลเชิงปริมาณ และเกิดการตั้งคำถามและข้อสงสัยว่าพื้นที่ใต้ฮิสโทแกรมสามารถนำไปคำนวณหาค่าหรือหาสูตรทางคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตประจำวันที่เกี่ยวข้องกับการเงินการลงทุนหรือการออมเงินอย่างไรได้บ้าง ซึ่งคณะผู้ดำเนินโครงการได้ดำเนินการจำลองสถานการณ์และนำเสนอด้วยฮิสโทแกรม จนพบว่าพื้นที่ใต้ฮิสโทแกรมที่เป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมูมุมฉากสามารถนำไปสู่การหาสูตรทางคณิตศาสตร์ พร้อมกับการจัดสมการให้เป็นสมการกำลังสองตัวแปรเดียวสามารถหาคำตอบของสูตรทางคณิตศาสตร์ที่ต้องการได้ จากที่กล่าวมาข้างต้น จึงนำไปสู่การจัดทำโครงการคณิตศาสตร์ในครั้งนี้

1.2 วัตถุประสงค์

1. เพื่อไขรหัสลับจากการหาพื้นที่ใต้ฮิสโทแกรมที่เป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมูมุมฉากและการแก้สมการกำลังสองตัวแปรเดียวตัวแปรเดียว

2. เพื่อตรวจสอบคำตอบรหัสลับจากการหาพื้นที่ใต้ฮิสโทแกรมที่เป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมูมุมฉาก ด้วยโปรแกรม GSP

1.3 สารที่เกี่ยวข้อง

1. ฮิสโทแกรม
2. สูตรพื้นที่สี่เหลี่ยมคางหมูมุมฉาก
3. การแก้สมการกำลังสองตัวแปรเดียวตัวแปรเดียว
4. โปรแกรม Geometer's Sketchpad (GSP)

1.4 นิยามศัพท์เฉพาะ

ไขรหัสลับความสัมพันธ์เชิงพื้นที่ฮิสโทแกรมและสี่เหลี่ยมคางหมู หมายถึง สูตรคณิตศาสตร์ที่ได้จากการหาพื้นที่ใต้ฮิสโทแกรมที่เป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมูมุมฉากและการแก้สมการกำลังสองตัวแปรเดียวนำไปใช้ในการคำนวณหาค่าต่าง ๆ ที่ใช้ในชีวิตประจำวัน เช่น การคำนวณจำนวนเงินออม การคำนวณเงินเดือน การคำนวณเงินรายได้จากการลงทุน การคำนวณผลประกอบการของธุรกิจ ฯลฯ

1.5 ขอบเขตของการศึกษาโครงการ

ตัวแปร

ตัวแปรต้น : สูตรการไขรหัสลับความสัมพันธ์เชิงพื้นที่ฮิสโทแกรมและสี่เหลี่ยมคางหมู

ตัวแปรตาม : ผลการตรวจสอบคำตอบด้วย

สูตรการไขรหัสลับความสัมพันธ์เชิงพื้นที่ฮิสโทแกรมและสี่เหลี่ยมคางหมู

ตัวแปรควบคุม : ตัวแปรที่ทำให้พื้นที่ใต้ฮิสโทแกรมเป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมูมุมฉาก

สมมติฐาน : สูตรรหัสลับ สามารถหาคำตอบของสิ่งที่ต้องการหาได้

อย่างถูกต้อง

ระยะเวลาในการดำเนินงานวันที่ 1 สิงหาคม 2569 – 18 สิงหาคม 2569

1.6 ประโยชน์ที่ได้รับจากการทำโครงการ

1. ได้ประยุกต์ความรู้การคำนวณสมการทางคณิตศาสตร์โดยใช้โปรแกรม (GSP)
2. มีความรู้เรื่องการนำเสนอฮิสโทแกรม สามารถนำเอาความรู้ที่ได้มาประยุกต์ใช้ได้จริง
3. นำไปประยุกต์หาสูตรทางคณิตศาสตร์ในชีวิตประจำวันกับความรู้ในเรื่องอื่น ๆ
4. เชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์และบูรณาการในการนำสูตรทางคณิตศาสตร์ไปใช้ในการเขียนโปรแกรมทางคอมพิวเตอร์ที่หลากหลายได้

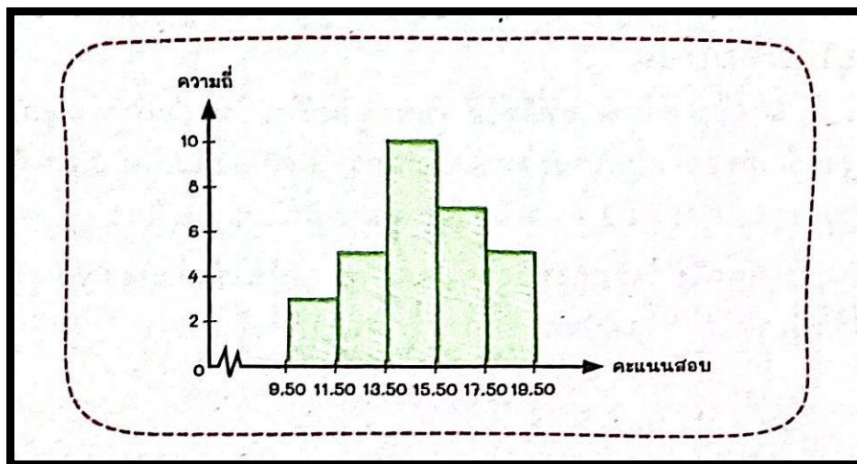
บทที่ 2 เอกสารที่เกี่ยวข้อง

การทำโครงการคณิตศาสตร์ครั้งนี้ มีการศึกษาค้นคว้าเอกสารและส่วนที่เกี่ยวข้อง ดังนี้

1. ฮิสโทแกรม
2. สูตรพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมคางหมูมุมฉาก
3. การแก้สมการกำลังสองตัวแปรเดียว
4. โปรแกรม Geometer's Sketchpad (GSP)

2.1 ฮิสโทแกรม

ฮิสโทแกรม เป็นการนำเสนอข้อมูลที่แสดงหารแยกแจกแจงความถี่ด้วยกราฟแท่งสี่เหลี่ยมมุมฉากเรียงต่อกัน ซึ่งแกนนอนแทนค่าของข้อมูล และแกนตั้งแทนความถี่ของข้อมูล โดยมีความกว้างของแท่งสี่เหลี่ยมมุมฉากเท่ากับความกว้างของอันตรภาคชั้น และความสูงของแท่งสี่เหลี่ยมมุมฉาก เท่ากับความถี่ของอันตรภาคชั้นนั้น ๆ



ภาพที่ 1 แสดงตัวอย่างการนำเสนอข้อมูลด้วยฮิสโทแกรม

2.2 สูตรพื้นที่สี่เหลี่ยมคางหมูมุมฉาก

รูปสี่เหลี่ยมคางหมู เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีด้านขนานกันเพียงคู่เดียว ส่วนพจนานุกรมศัพท์วิทยาศาสตร์ คณิตศาสตร์ และเทคโนโลยี ของสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี ได้ให้คำนิยามไว้ว่า

รูปสี่เหลี่ยมคางหมู คือ รูปสี่เหลี่ยมใด ๆ ที่มีด้านตรงข้ามขนานกันคู่หนึ่ง และคู่เดียวเท่านั้น

คุณสมบัติทางเรขาคณิต

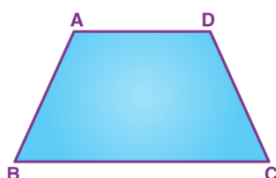
1. มีด้านตรงข้ามขนานกันเพียง 1 คู่ ซึ่งอาจจะยาวเท่ากันหรือไม่เท่ากันก็ได้
2. ด้านคู่ที่ไม่ขนานกันอาจจะยาวเท่ากันหรือไม่ก็ได้ (ซึ่งถ้ายาวเท่ากันจะเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน หรือสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน ซึ่งจัดเป็นกรณีพิเศษ และทำให้ด้านตรงข้ามยาวเท่ากัน)
3. มุมที่ด้านคู่ขนานเป็นด้านเดียวกันทั้งสองมุม จะมีขนาดรวมกันเป็น 180 องศา หรือ สองมุมฉาก หรือ π เรเดียน

การใช้รูปสี่เหลี่ยมคางหมูในสถาปัตยกรรม

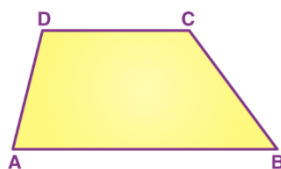
พบในสถาปัตยกรรมแบบอียิปต์โบราณ โดยมีการเจาะช่องหน้าต่างต่าง ประตูล และการก่อสร้างตัวอาคารเป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมูโดยมีด้านฐานยาวกว่าด้านยอด

ประเภทหลักของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู

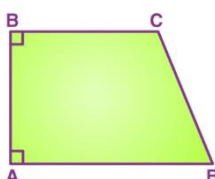
1. **สี่เหลี่ยมคางหมูหน้าจั่ว (Isosceles Trapezoid)** : มีด้านที่ไม่ขนานกัน (ขา) ยาวเท่ากัน และมุมที่ฐานเท่ากันด้วย



2. **สี่เหลี่ยมคางหมูด้านไม่เท่า (Scalene Trapezoid)** : ทุกด้านมีความยาวต่างกัน ไม่มีด้านที่เท่ากันเลย



3. **สี่เหลี่ยมคางหมูมุมฉาก (Right Trapezoid)** : มีมุมฉากติดกันอย่างน้อย 2 มุม หรือเรียกว่า มีมุมฉาก 1 คู่



รูปสี่เหลี่ยมคางหมูมุมฉาก (Right Trapezoid) เป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมูที่มีมุมหนึ่งเป็น มุมฉาก ที่มีด้านที่ไม่ขนานกันด้านหนึ่งตั้งฉากกับด้านคู่ขนานทั้งสองข้าง ทำให้เกิดมุมฉาก 2 มุม (มุมที่ฐานด้านหนึ่งและมุมที่ด้านข้างอีกด้านหนึ่ง) เป็นรูปที่พบได้บ่อยในการคำนวณพื้นที่สี่เหลี่ยมคางหมู

ลักษณะสำคัญ

1. มีด้านขนานกัน 1 คู่ : เหมือนสี่เหลี่ยมคางหมูทั่วไป
2. มีมุมฉาก 2 มุม : ด้านที่ไม่ขนานกันด้านหนึ่งตั้งฉากกับด้านคู่ขนานทั้งสอง
3. พื้นที่ : คำนวณได้จากสูตร $\frac{1}{2} \times (\text{ผลรวมด้านคู่ขนาน}) \times \text{ความสูง}$
ซึ่งความสูง คือความยาวของด้านที่ไม่ขนานที่ตั้งฉากกับด้านคู่ขนาน

2.3 การแก้สมการกำลังสองตัวแปรเดียวตัวแปรเดียว

สมการกำลังสองตัวแปรเดียวตัวแปรเดียว คือ สมการที่มีรูปทั่วไปเป็น $ax^2 + bx + c = 0$ ซึ่งมี x เป็นตัวแปรเมื่อ a, b, c เป็นค่าคงที่ และ $a \neq 0$

คำตอบของสมการกำลังสองตัวแปรเดียวตัวแปรเดียว คือ จำนวนจริงใด ๆ ที่แทนตัวแปรในสมการกำลังสองตัวแปรเดียวตัวแปรเดียว แล้วทำให้สมการเป็นจริง ซึ่งคำตอบของสมการกำลังสองตัวแปรเดียวตัวแปรเดียว มี 3 แบบ คือ 0, 1 และ 2 คำตอบ

การแก้สมการกำลังสองตัวแปรเดียวตัวแปรเดียว

1. จัดรูปแบบสมการ เขียนสมการให้อยู่ในรูป $ax^2 + bx + c = 0$ โดยที่ a, b, c เป็นค่าคงที่ และ $a \neq 0$

2. เลือกวิธีการแก้สมการ

1. การแก้สมการกำลังสองตัวแปรเดียวตัวแปรเดียวโดยการแยกตัวประกอบ

- 1) ดำเนินการแยกตัวประกอบของ $ax^2 + bx + c = 0$ ให้อยู่ในรูป การคูณกันของพหุนามดีกรีหนึ่ง 2 พหุนาม

- 2) ใช้สมบัติของจำนวนจริง คือ ถ้า m, n เป็นจำนวนจริง และ $mn = 0$ แล้ว $m = 0$ หรือ $n = 0$ นั่นคือ เมื่อ A เป็นพหุนามหนึ่ง และ B เป็นอีกพหุนามหนึ่ง ถ้า $A \times B = 0$ แล้ว $A = 0$ หรือ $B = 0$ แล้วแก้สมการเพื่อหาคำตอบ

2. การแก้สมการกำลังสองตัวแปรเดียวตัวแปรเดียวโดยใช้สูตร (Quadratic Formula)

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

โดยที่ ถ้า $b^2 - 4ac > 0$ แล้วจะมีคำตอบของสมการ 2 คำตอบ

ถ้า $b^2 - 4ac = 0$ แล้วจะมีคำตอบของสมการ 1 คำตอบ

ถ้า $b^2 - 4ac < 0$ แล้วจะไม่มีคำตอบของสมการ

3. การแก้สมการกำลังสองตัวแปรเดียวตัวแปรเดียวโดยวิธีทำเป็นกำลังสองสมบูรณ์

จำนวนที่เป็นกำลังสองสมบูรณ์ เช่น $(a + b)^2$ และ $(a - b)^2$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริงใด ๆ ที่ไม่เท่ากับศูนย์

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \text{ และ } (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

ในการหาคำตอบสมการให้อยู่ในรูป $ax^2 + bx + c = 0$ เมื่อ a, b, c เป็นค่าคงที่ และ $a \neq 0$ อาจทำได้โดยใช้ความรู้เรื่องกำลังสองสมบูรณ์ และ ผลต่างกำลังสองมาช่วยในการแยกตัวประกอบของพหุนามนั้น

2.3 โปรแกรม The Geometer's Sketchpad หรือ GSP

โปรแกรม The Geometer's Sketchpad หรือ GSP สำหรับการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ เป็นการบูรณาการสาระที่เกี่ยวข้องกับความรู้คณิตศาสตร์และทักษะด้านเทคโนโลยีเข้าด้วยกัน ทำให้ผู้เรียนมีโอกาสพัฒนาพหุปัญญาอันได้แก่ ปัญญาทางด้านภาษา ด้านตรรกศาสตร์ด้านมิติสัมพันธ์และด้านศิลปะ โปรแกรม GSP มีลักษณะเป็น Dynamic software ที่ช่วยให้ผู้เรียนมีโอกาสเรียนคณิตศาสตร์ โดยการสร้างองค์ความรู้ใหม่ๆ หรือสร้างความคิดรวบยอดต่างๆ ทางคณิตศาสตร์ได้ด้วยตนเอง เนื่องจากเวลาใช้โปรแกรม GSP ผู้เรียนสามารถสร้างตัวแบบคณิตศาสตร์ (Mathematical Model) ที่ทำให้เกิดการเคลื่อนไหวเชิงเรขาคณิต และผู้ใช้สามารถมีปฏิสัมพันธ์โต้ตอบกับโปรแกรมได้ โปรแกรม GSP สามารถนำมาใช้สร้างรูปเรขาคณิตที่เคลื่อนไหวได้ซึ่งนำไปสู่การค้นหามบัติต่างๆ ทางเรขาคณิต โดยผู้เรียนสามารถสำรวจตั้งข้อสังเกต คาดเดาและสืบเสาะตรวจสอบเพื่อยืนยันเหตุผลของตนเอง ทำให้เกิดจินตนาการในการค้นคว้าหา

เหตุผลเป็นการเพิ่มพูนความรู้ให้กับผู้เรียน และพัฒนาความคิดรวบยอดเกี่ยวกับเนื้อหาสาระต่างๆ ในวิชาคณิตศาสตร์ไม่ว่าจะเป็นทางเรขาคณิต พีชคณิต ตรีโกณมิติ แคลคูลัส ได้เป็นอย่างดี นอกจากนี้สำหรับผู้สอนเองก็สามารถนำเอาโปรแกรม GSP มาช่วยเป็นสื่อในการสร้างบรรยากาศของการเรียนการสอนที่ส่งเสริมให้มีการนำเสนอความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์ความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ตลอดจนมีการนำเสนอที่น่าตื่นตาตื่นใจซึ่งทำให้ผู้เรียนเกิดความสนใจ มีการซักถาม การโต้ตอบ ซึ่งจะทำให้ผู้เรียนตั้งข้อคำถามเหตุการณ์และหาข้อสรุปในเวลาเรียนหรือในช่วงเวลาที่น่าเสนอได้ซึ่งขอบเขตของการใช้งานโปรแกรมนั้นก็ขึ้นอยู่กับจินตนาการของผู้เรียนเองส่วนประเทศไทยนั้นสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ได้ซื้อลิขสิทธิ์ โปรแกรม GSP เวอร์ชัน 4.06 จากบริษัท Key Curriculum Press เมื่อประมาณปลายปี พ.ศ. 2547 และแปลเป็นภาษาไทย (Thai Version) เพื่อให้สามารถเรียนรู้ได้ง่ายและสะดวกมากขึ้น



ภาพที่ 2 แสดงโปรแกรม The Geometer's Sketchpad หรือ GSP

บทที่ 3 วิธีการดำเนินการ

กลุ่มผู้จัดทำโครงการคณิตศาสตร์จะกล่าวถึงวิธีการดำเนินงาน ดังนี้

ปฏิทินการปฏิบัติงาน

ขั้นตอนการดำเนินงาน

ขั้นตอนการหาสูตรลับคณิต พิชิตเงินล้าน จากการหาพื้นที่ใต้ฮิสโทแกรมที่เป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมู มุมฉากและการแก้สมการกำลังสองตัวแปรเดียว

ขั้นตอนการตรวจสอบคำตอบสูตรลับคณิต พิชิตเงินล้าน ด้วยโปรแกรม GSP

3.1 ปฏิทินการปฏิบัติงาน

ลำดับที่	รายการ	ระยะเวลา	คณะผู้รับผิดชอบ
1	ศึกษาวิธีการทำโครงการคณิตศาสตร์และคิดเรื่องที่จะทำโครงการคณิตศาสตร์	1 ส.ค.69	คณะผู้จัดทำ
2	ประชุมวางแผนการทำโครงการคณิตศาสตร์	2-3 ส.ค.69	คณะผู้จัดทำ/ครูที่ปรึกษา
3	เขียนเค้าโครง โครงการคณิตศาสตร์	4-5 ส.ค.69	คณะผู้จัดทำ
4	วางแผนการดำเนินงานแบ่งหน้าที่รับผิดชอบ	6 ส.ค.69	คณะผู้จัดทำ/ครูที่ปรึกษา
5	ศึกษาเกี่ยวกับการนำเสนอฮิสโทแกรมและการใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad หรือ GSP	7 ส.ค.69	คณะผู้จัดทำ
6	จำลองสถานการณ์ไปสู่การสร้างฮิสโทแกรมที่มีพื้นที่เป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมูมุมฉาก	7 ส.ค.69	คณะผู้จัดทำ
7	หารหัสลับ จากการหาพื้นที่ใต้ฮิสโทแกรมที่เป็นพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมคางหมูมุมฉากและการแก้สมการกำลังสองตัวแปรเดียว	8-10 ส.ค.69	คณะผู้จัดทำ
8	ตรวจสอบคำตอบรหัสลับ ด้วยโปรแกรม GSP	11 ส.ค.69	คณะผู้จัดทำ/ครูที่ปรึกษา
9	จัดทำรายงานและเอกสารรูปเล่มโครงการ	12 ส.ค.69	คณะผู้จัดทำ/ครูที่ปรึกษา
10	ทำสื่อนำเสนอและฝึกซ้อมการนำเสนอ	13 – 17 ส.ค.69	คณะผู้จัดทำ/ครูที่ปรึกษา
11	นำเสนอโครงการต่อคณะกรรมการ	18 ส.ค.69	คณะผู้จัดทำ/ครูที่ปรึกษา

ตารางที่ 1 ปฏิทินแสดงการปฏิบัติงาน

3.2 ขั้นตอนในการดำเนินงาน

1. คิดหัวข้อโครงการเพื่อนำเสนอครูที่ปรึกษาโครงการ
2. ศึกษาข้อมูลเรื่องที่น่าสนใจคือ เรื่องฮิสโทแกรม การแก้สมการกำลังสองตัวแปรเดียว
3. จำลองสถานการณ์ไปสู่การสร้างฮิสโทแกรมที่มีพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมคางหมูมามาก
4. ทหารหัสลับ จากการหาพื้นที่ใต้ฮิสโทแกรมที่เป็นรูปพื้นที่สี่เหลี่ยมคางหมูมามากและการแก้สมการกำลังสองตัวแปรเดียว
5. ตรวจสอบคำตอบรหัสลับ ด้วยโปรแกรม GSP
6. สรุปผลการดำเนินงาน และวิเคราะห์ผลการดำเนินงานทั้งหมด
7. ประเมินงานและตรวจสอบ สรุปผลการดำเนินงาน
8. เขียนรายงานและจัดทำบอร์ดโครงการ
9. ฝึกเตรียมการนำเสนอโครงการต่อครูที่ปรึกษา
10. นำเสนอโครงการต่อคณะกรรมการ

3.3 ขั้นตอนการทหารหัสลับ จากการหาพื้นที่ใต้ฮิสโทแกรมที่เป็นพื้นที่

รูปสี่เหลี่ยมคางหมูมามากและการแก้สมการกำลังสองตัวแปรเดียว

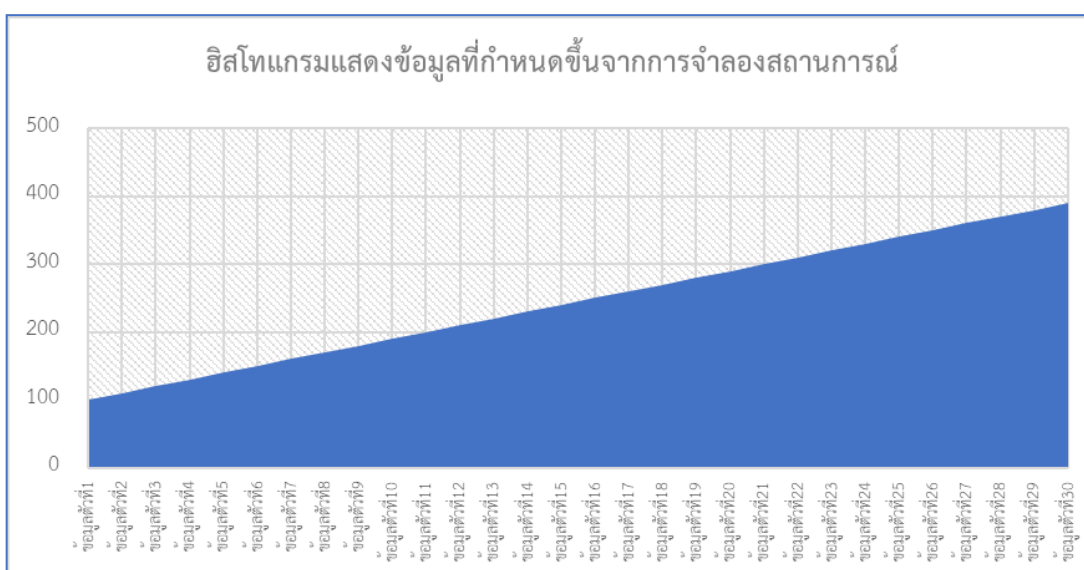
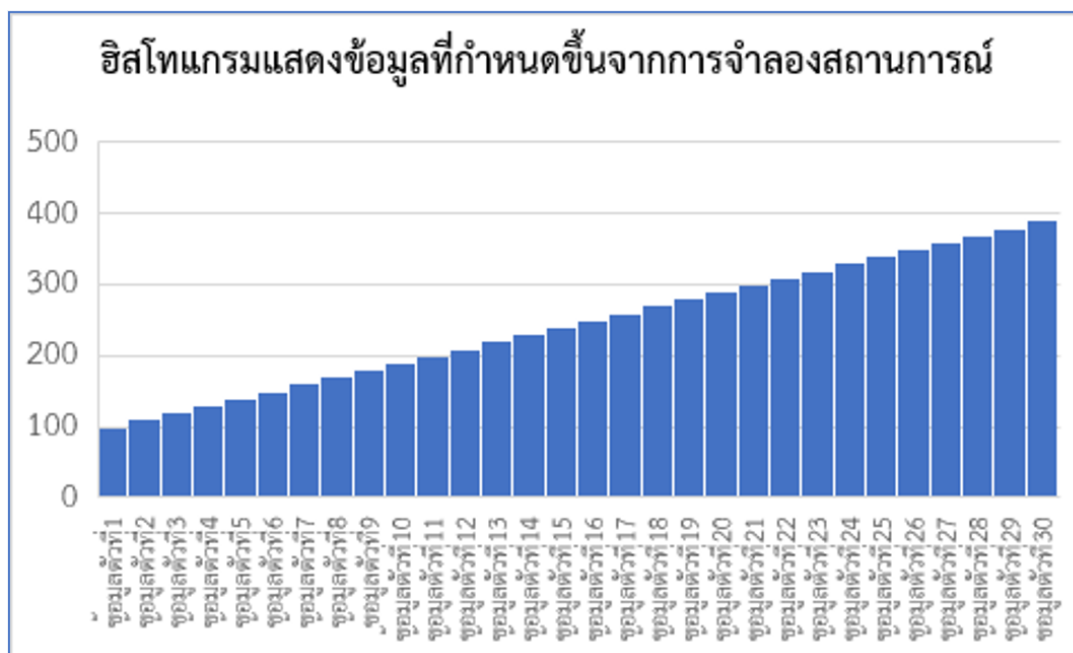
3.3.1 การจำลองสถานการณ์ไปสู่การสร้างฮิสโทแกรมที่มีพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมคางหมูมามาก

การจำลองสถานการณ์ โดยกำหนดให้ข้อมูลทั้งสี่จำนวน 30 ข้อมูล เริ่มจากข้อมูลที่มีค่า 100 และ เพิ่มขึ้นจากข้อมูลก่อนหน้าทีละ 10 ดังตารางต่อไปนี้

ข้อมูลตัวที่	ความถี่	ความถี่สะสม	ข้อมูลตัวที่	ความถี่	ความถี่สะสม	ข้อมูลตัวที่	ความถี่	ความถี่สะสม
1	100	100	11	200	1650	21	300	4200
2	110	210	12	210	1860	22	310	4510
3	120	330	13	220	2080	23	320	4830
4	130	460	14	230	2310	24	330	5160
5	140	600	15	240	2550	25	340	5500
6	150	750	16	250	2800	26	350	5850
7	160	910	17	260	3060	27	360	6210
8	170	1080	18	270	3330	28	370	6580
9	180	1260	19	280	3610	29	380	6960
10	190	1450	20	290	3900	30	390	7350

ตารางที่ 2 การจำลองสถานการณ์ข้อมูลที่มีความถี่ของข้อมูล เพิ่มขึ้นจากข้อมูลก่อนหน้าทีละ 10

นำข้อมูลจากตารางที่ได้จากการกำหนดสถานการณ์ นำเสนอด้วยฮิสโทแกรม โดยใช้โปรแกรม Excel ได้ดังนี้



ภาพที่ 3 แสดงฮิสโทแกรมแสดงข้อมูลความถี่ที่กำหนดขึ้นจากการจำลองสถานการณ์

จากภาพที่ ... ฮิสโทแกรมแสดงข้อมูลความถี่ที่กำหนดขึ้นจากการจำลองสถานการณ์ จำนวนทั้งหมด 30 ข้อมูล โดยข้อมูลแต่ละตัวจะมีความถี่เพิ่มขึ้นทีละ 10 จากข้อมูลก่อนหน้า เมื่อปรับพื้นที่ใต้ฮิสโทแกรมเป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมูมุมฉาก สามารถคำนวณได้ดังนี้

$$\text{พื้นที่ใต้ฮิสโทแกรมเป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมูมุมฉาก} = \frac{1}{2} \times \text{ผลรวมความยาวด้านคู่ขนาน} \times \text{สูง}$$

$$= \frac{1}{2} \times (100 + 390) \times 30$$

$$= 7,350 \quad \text{ตารางหน่วย}$$

จากการคำนวณหาพื้นที่ใต้ฮิสโทแกรมเป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมูมุมฉากมีพื้นที่ทั้งหมด 7350 ตารางหน่วย ซึ่งตรงกับผลรวมความถี่ของข้อมูลทั้งหมด

จากตารางที่ 2 การจำลองสถานการณ์ข้อมูลที่มีความถี่ของข้อมูลเพิ่มขึ้นทีละ 10 เริ่มต้นที่ 100

กำหนดให้ y_1 แทนความถี่ของข้อมูลตัวที่ 1 , y_2 แทนความถี่ของข้อมูลตัวที่ 2

y_3 แทนความถี่ของข้อมูลตัวที่ 3 ... , y_n แทนความถี่ของข้อมูลตัวที่ n

เมื่อ n แทนจำนวนข้อมูลทั้งหมด

$$y_1 = 100$$

$$y_2 = 110 = 100 + 10 = y_1 + \frac{10}{100} y_1$$

$$y_3 = 120 = 110 + 10 = y_2 + \frac{10}{100} y_1 = y_1 + \frac{10}{100} y_1 + \frac{10}{100} y_1 = y_1 + 2 \cdot \frac{10}{100} y_1$$

$$y_4 = 130 = 120 + 10 = y_3 + \frac{10}{100} y_1 = y_1 + \frac{10}{100} y_1 + \frac{10}{100} y_1 + \frac{10}{100} y_1 = y_1 + 3 \cdot \frac{10}{100} y_1$$

$\vdots$

$$y_n = y_1 + (n - 1) \cdot \frac{10}{100} y_1$$

ทดลองหาค่า y_{10} แทนค่า $n = 10$ ใน สมการ $y_n = y_1 + (n - 1) \cdot \frac{10}{100} y_1$ จะได้ว่า

$$y_{10} = 100 + (10 - 1) \cdot \frac{10}{100} (100)$$

$$= 100 + (9) \cdot \frac{10}{100} (100)$$

$$= 190 \quad \text{มีค่าตรงกับความถี่ที่กำหนดในตารางที่ 2}$$

3.3.2 การหาพื้นที่ใต้ฮิสโทแกรมที่เป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมู

มุมฉาก

กำหนดให้ y_1 แทนความถี่ของข้อมูลตัวที่ 1

ซึ่ง y_1 เป็นความยาวด้านคู่ขนานด้านที่สั้นของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูมุมฉาก

y_n แทนความถี่ของข้อมูลตัวที่ n

ซึ่ง y_n เป็นความยาวด้านคู่ขนานด้านที่ยาวของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูมุมฉาก

n แทนความสูงของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูมุมฉาก

เมื่อ p แทนร้อยละของความถี่ที่เพิ่มขึ้นของข้อมูลตัวที่ 1

$$\text{พื้นที่ใต้ฮิสโทแกรมเป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมูมุมฉาก} = \frac{1}{2} \times \text{ผลรวมความยาวด้านคู่ขนาน} \times \text{สูง}$$

$$= \frac{1}{2} \times (y_1 + y_n) \times n$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \times (y_1 + y_1 + (n-1) \cdot py_1) \times n \\
&= \frac{1}{2} \times (y_1 + y_1 + (n-1) \cdot py_1) \times n \\
&= \frac{1}{2} \times (2y_1 + (n-1) \cdot py_1) \times n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \text{พื้นที่ใต้ฮิสโทแกรมเป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมูมุมฉาก} &= \text{ผลรวมความถี่ทั้งหมดของข้อมูล} \\
&= \frac{1}{2} \times (2y_1 + (n-1) \cdot py_1) \times n
\end{aligned}$$

3.3.3 การหารหสลับ ด้วยการแก้สมการกำลังสองตัวแปรเดียว

$$\begin{aligned}
\text{จาก พื้นที่ใต้ฮิสโทแกรมเป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมูมุมฉาก} &= \text{ผลรวมความถี่ของข้อมูลทั้งหมด} \\
&= \frac{1}{2} \times (2y_1 + (n-1) \cdot py_1) \times n \\
\text{กำหนดให้ } A \text{ แทน พื้นที่ใต้ฮิสโทแกรมเป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมูมุมฉาก หรือ ผลรวมความถี่ของข้อมูลทั้งหมด} \\
A &= \frac{1}{2} \times (2y_1 + (n-1) \cdot py_1) \times n
\end{aligned}$$

$$n = \frac{2A}{2y_1 + (n-1) \cdot py_1}$$

$$n \cdot [2y_1 + (n-1) \cdot py_1] = 2A$$

$$py_1 n^2 - py_1 n + 2y_1 n = 2A$$

$$py_1 n^2 + (2y_1 - py_1)n - 2A = 0$$

$$n = \frac{-(2y_1 - py_1) \pm \sqrt{(2y_1 - py_1)^2 - 4(py_1)(-2A)}}{2 \cdot py_1}$$

$$n = \frac{-(2y_1 - py_1) \pm \sqrt{(2y_1 - py_1)^2 + 8py_1 A}}{2 \cdot py_1}$$

$$\therefore n = \frac{-(2y_1 - py_1) \pm \sqrt{(2y_1 - py_1)^2 + 8py_1 A}}{2 \cdot py_1} \quad \text{โดยที่ ค่า } n \geq 0$$

จากสูตรข้างต้น สมมติสถานการณ์ ออมเงินเริ่มต้นเดือนละ 100 บาท เดือนถัดไปเพิ่มขึ้น 10% ของเดือนแรกเสมอ ถ้าต้องการออมเงินให้ได้หนึ่งล้านบาท จะต้องออมเงินทั้งหมดอย่างน้อยกี่เดือน

วิธีทำ ให้ $y_1 = 100$ และ $p = 10\%$ ต้องการ $A = 1,000,000$ จะ ต้องหา n

$$\text{จากสูตร} \quad n = \frac{-(2y_1 - py_1) \pm \sqrt{(2y_1 - py_1)^2 + 8py_1 A}}{2 \cdot py_1} \quad \text{โดยที่ ค่า } n \geq 0$$

$$= \frac{-(200-10) \pm \sqrt{(200-10)^2 + 8(10) \cdot (1,000,000)}}{20}$$

$$= \frac{-(190) \pm \sqrt{(190)^2 + 80,000,000}}{20}$$

$$= 437.81$$

ดังนั้น ต้องออมเงินอย่างน้อย 438 เดือน

ตรวจคำตอบ จากสูตร $A = \frac{1}{2} \times (2y_1 + (n-1) \cdot py_1) \times n$

$$= \frac{1}{2} \times \left(2 \cdot (100) + (438-1) \cdot \frac{10}{100} \cdot 100 \right) \times 438$$

$$= \frac{1}{2} \times (200 + (437) \cdot 10) \times 438$$

$$= 1,000,830$$

$$\approx 1,000,000$$

3.4 ขั้นตอนการตรวจสอบคำตอบรหัสลับ ด้วยโปรแกรม GSP

การใช้โปรแกรม GSP ในการตรวจสอบคำตอบสูตรลัด รหัสลับ
โดย กำหนดค่าพารามิเตอร์ที่เกี่ยวข้อง ดังนี้

กำหนดให้ y_1 แทนค่าของข้อมูลตัวที่ 1 y_n แทนค่าของข้อมูลตัวที่ n

n แทนจำนวนงวด p แทนร้อยละของค่าที่เพิ่มขึ้นของข้อมูลตัวที่ 1

A แทนผลรวมของข้อมูลทั้งหมด

The Geometer's Sketchpad By KrabiGsp - [คลิกเพื่อดูตัวอย่างGSP - 1]

เพิ่ม แก้ไข แสดงผล คำนวณ ภาพนิ่ง การวัด ล้างจอ กราฟ หน้างาน ช่วยเหลือ

$y1 = 100.0$

$p = 0.10$

$n = 440.00$

$y_n = y1 + (n-1) \cdot p \cdot y1 = 4490.00$

$A = \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot y1 + (n-1) \cdot p \cdot y1) \cdot n = 1.01 \cdot 10^6$

			y_n	A
$y1$	p	n	$y1 + (n-1) \cdot p \cdot y1$	$\frac{1}{2} \cdot (2 \cdot y1 + (n-1) \cdot p \cdot y1) \cdot n$
100.0	0.10	1.00	100.00	100.00
100.0	0.10	2.00	110.00	210.00
100.0	0.10	3.00	120.00	330.00
100.0	0.10	4.00	130.00	460.00
100.0	0.10	5.00	140.00	600.00
100.0	0.10	6.00	150.00	750.00
100.0	0.10	7.00	160.00	910.00
100.0	0.10	8.00	170.00	1080.00
100.0	0.10	9.00	180.00	1260.00
100.0	0.10	10.00	190.00	1450.00
100.0	0.10	437.00	4460.00	996360.00
100.0	0.10	438.00	4470.00	$1.00 \cdot 10^6$
100.0	0.10	439.00	4480.00	$1.01 \cdot 10^6$
100.0	0.10	440.00	4490.00	$1.01 \cdot 10^6$

ภาพที่ 4 แสดงการใช้โปรแกรม GSP ในการตรวจสอบคำตอบสูตรลัด รหัสลับ

จากภาพที่ เมื่อกำหนดค่าตัวแปร y_1 , n และ p ในโปรแกรม GSP จะสามารถคำนวณหา
ค่า y_n และ A ได้ตรงตามข้อมูลที่จำลองสถานการณ์ไว้เบื้องต้น สามารถสรุปได้ว่าสูตรลัด พิชิตเงินล้าน
สามารถใช้โปรแกรม GSP ในการตรวจสอบคำตอบ ได้อย่างถูกต้องแม่นยำ

The Geometer's Sketchpad By KrabiGsp - [คลิกคลิกคลิกด้วยGSP - 2]

เมนู: แก้ไข, แสดงผล, สร้าง, การแปลง, การวัด, ตัวเลข, กราฟ, หน้าต่าง, วิดีโอ

$y_1 = 1000$
 $p = 0.50$
 $A = 1000000$

$$n = \left(\frac{-(2 \cdot y_1 - p \cdot y_1) + \sqrt{((2 \cdot y_1 - p \cdot y_1)^2) + 8 \cdot p \cdot y_1 \cdot A}}{2 \cdot p \cdot y_1} \right) = 61.76$$

n

y_1	p	A	$\left(\frac{-(2 \cdot y_1 - p \cdot y_1) + \sqrt{((2 \cdot y_1 - p \cdot y_1)^2) + 8 \cdot p \cdot y_1 \cdot A}}{2 \cdot p \cdot y_1} \right)$
100	0.10	1000	7.54
100	0.10	10000	36.22
100	0.10	100000	132.24
100	0.10	1000000	437.81
1000	0.10	1000000	132.24
1000	0.20	1000000	95.60
1000	0.30	1000000	78.87
1000	0.40	1000000	68.74
1000	0.50	1000000	61.76

1 2

B I U

ภาพที่ 5 แสดงการใช้โปรแกรม GSP ในการตรวจสอบคำตอบสูตรลัด พิชิตเงินล้าน

จากภาพที่ เมื่อกำหนดค่าตัวแปร y_1 , p และ A ในโปรแกรม GSP จะสามารถคำนวณหาค่า n ได้
ตรงตามข้อมูลที่จำลองสถานการณ์ไว้เบื้องต้น สามารถสรุปได้ว่าสูตรลัด รหัสลับ สามารถใช้โปรแกรม GSP ใน
การตรวจสอบคำตอบ ได้อย่างถูกต้องแม่นยำ

บทที่ 4 ผลการดำเนินการ

จากที่คณะผู้จัดทำได้ดำเนินโครงการคณิตศาสตร์ครั้งนี้มีผลการดำเนินการดังนี้

4.1 ผลการหารหัสลับ จากการหาพื้นที่ใต้ฮิสโทแกรมที่เป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมูมฉากและ การแก้สมการกำลังสองตัวแปรเดียว

เมื่อกำหนดข้อมูลที่มีความถี่ของข้อมูลที่มีการเพิ่มขึ้นจากข้อมูลตัวที่ 1 เป็นร้อยละที่เท่ากัน ทำให้ได้ฮิสโทแกรมเป็นพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมคางหมูมฉาก

เมื่อกำหนดให้ y_1 แทนความถี่ของข้อมูลตัวที่ 1

ซึ่ง y_1 เป็นความยาวด้านคู่ขนานด้านที่สั้นของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูมฉาก

y_n แทนความถี่ของข้อมูลตัวที่ n

ซึ่ง y_n เป็นความยาวด้านคู่ขนานด้านที่ยาวของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูมฉาก

n แทนความสูงของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูมฉาก

เมื่อ p แทนร้อยละของความถี่ที่เพิ่มขึ้นของข้อมูลตัวที่ 1

โดยที่ $y_n = y_1 + (n - 1) \cdot py_1$ สรุปได้ว่า

$$\text{พื้นที่ใต้ฮิสโทแกรมเป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมูมฉาก} = \frac{1}{2} \times \text{ผลรวมความยาวด้านคู่ขนาน} \times \text{สูง}$$

$$\text{พื้นที่ใต้ฮิสโทแกรมเป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมูมฉาก} = \text{ผลรวมความถี่ของข้อมูลทั้งหมด}$$

$$= \frac{1}{2} \times (2y_1 + (n - 1) \cdot py_1) \times n$$

กำหนดให้ A แทน พื้นที่ใต้ฮิสโทแกรมเป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมูมฉาก หรือ ผลรวมความถี่ของข้อมูลทั้งหมด

$$A = \frac{1}{2} \times (2y_1 + (n - 1) \cdot py_1) \times n$$

$$n = \frac{2A}{2y_1 + (n-1) \cdot py_1}$$

การหาสูตรลับคณิต พิชิตเงินล้าน ด้วยการแก้สมการกำลังสองตัวแปรเดียว จะได้ว่า

$$\therefore n = \frac{-(2y_1 - py_1) \pm \sqrt{(2y_1 - py_1)^2 + 8py_1A}}{2 \cdot py_1} \quad \text{โดยที่ ค่า } n \geq 0$$

4.2 ผลการตรวจสอบคำตอบรหัสลับ ด้วยโปรแกรม GSP

การใช้โปรแกรม GSP ในการตรวจสอบคำตอบสูตรรหัสลับ
โดย กำหนดค่าพารามิเตอร์ที่เกี่ยวข้อง ดังนี้

กำหนดให้ y_1 แทนค่าของข้อมูลตัวที่ 1 y_n แทนค่าของข้อมูลตัวที่ n
 n แทนจำนวนงวด p แทนร้อยละของค่าที่เพิ่มขึ้นของข้อมูลตัวที่ 1
 A แทนผลรวมของข้อมูลทั้งหมด

y_1	p	n	$y_1 + (n-1) \cdot p \cdot y_1$	$\frac{1}{2} \cdot (2 \cdot y_1 + (n-1) \cdot p \cdot y_1) \cdot n$	y_1	p	A	$\left(\frac{-2 \cdot y_1 - p \cdot y_1 + \sqrt{(2 \cdot y_1 - p \cdot y_1)^2 + 8 \cdot p \cdot y_1 \cdot A}}{2 \cdot p \cdot y_1} \right)$
100.0	0.10	1.00	100.00	100.00	100	0.10	1000	7.54
100.0	0.10	2.00	110.00	210.00	100	0.10	10000	36.22
100.0	0.10	3.00	120.00	330.00	100	0.10	100000	132.24
100.0	0.10	4.00	130.00	460.00	100	0.10	1000000	437.81
100.0	0.10	5.00	140.00	600.00	1000	0.10	1000000	132.24
100.0	0.10	6.00	150.00	750.00	1000	0.20	1000000	95.60
100.0	0.10	7.00	160.00	910.00	1000	0.30	1000000	78.87
100.0	0.10	8.00	170.00	1080.00	1000	0.40	1000000	68.74
100.0	0.10	9.00	180.00	1260.00	1000	0.50	1000000	61.76
100.0	0.10	10.00	190.00	1450.00				
100.0	0.10	437.00	4460.00	996360.00				
100.0	0.10	438.00	4470.00	$1.00 \cdot 10^6$				
100.0	0.10	439.00	4480.00	$1.01 \cdot 10^6$				
100.0	0.10	440.00	4490.00	$1.01 \cdot 10^6$				

ตารางที่ 3 แสดงข้อมูลที่ได้จากการใช้โปรแกรม GSP คำนวณตามสูตรรหัสลับ

จากตารางที่ 3 ในกรณี กำหนดค่าตัวแปร y_1 , n และ p ในโปรแกรม GSP จะสามารถ
 คำนวณหาค่า y_n และ A ได้อย่างถูกต้องแม่นยำ หรือ ในกรณี กำหนดค่าตัวแปร y_1 , p และ A ใน
 โปรแกรม GSP จะสามารถคำนวณหาค่า n ได้ตรงตามข้อมูลที่จำลองสถานการณ์ไว้เบื้องต้น สามารถสรุปได้ว่า
 สามารถใช้โปรแกรม GSP ในการตรวจสอบคำตอบ ได้อย่างถูกต้องแม่นยำ และรวดเร็ว ทำให้ทราบว่า จาก
 การหาความสัมพันธ์ของตัวแปรต่าง ๆ โดยใช้สูตรการหาพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมคางหมูมุมฉากและการแก้สมการ
 กำลังสองตัวแปรเดียวทำให้ได้ สูตรรหัสลับ เป็นสูตรทางคณิตศาสตร์ที่ถูกต้องและสามารถนำไปใช้ได้จริง

บทที่ 5 สรุป อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ

จากการดำเนินการทำโครงการสามารถสรุปผลการดำเนินการ/อภิปรายผลการดำเนินการได้ ดังนี้

5.1 สรุปผลการดำเนินการ

จากการดำเนินโครงการคณิตศาสตร์ ไชรหส์ลับได้ความสัมพันธ์เชิงพื้นที่ระหว่างพื้นที่ใต้กราฟฮิสโทแกรมและพื้นที่สี่เหลี่ยมคางหมูมฉาก สรุปผลดังนี้

กำหนดให้ y_1 แทนค่าของข้อมูลตัวที่ 1 y_n แทนค่าของข้อมูลตัวที่ n

n แทนจำนวนจุด p แทนร้อยละของค่าที่เพิ่มขึ้นของข้อมูลตัวที่ 1

A แทนผลรวมของข้อมูลทั้งหมด โดยที่ $y_n = y_1 + (n - 1) \cdot py_1$

สรุปสูตรได้ดังนี้

พื้นที่ใต้ฮิสโทแกรมเป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมูมฉาก $= \frac{1}{2} \times$ ผลรวมความยาวด้านคู่ขนาน $\times$ สูง

พื้นที่ใต้ฮิสโทแกรมเป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมูมฉาก $=$ ผลรวมความถี่ของข้อมูลทั้งหมด

$$= \frac{1}{2} \times (2y_1 + (n - 1) \cdot py_1) \times n$$

กำหนดให้ A แทน พื้นที่ใต้ฮิสโทแกรมเป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมูมฉาก หรือ ผลรวมความถี่ของข้อมูลทั้งหมด

$$A = \frac{1}{2} \times (2y_1 + (n - 1) \cdot py_1) \times n$$

$$n = \frac{2A}{2y_1 + (n-1) \cdot py_1}$$

การหารหส์ลับ ด้วยการแก้สมการกำลังสองตัวแปรเดียว จะได้ว่า

$$\therefore n = \frac{-(2y_1 - py_1) \pm \sqrt{(2y_1 - py_1)^2 + 8py_1A}}{2 \cdot py_1} \quad \text{โดยที่ ค่า } n \geq 0$$

5.2 อภิปรายผล

จากความสัมพันธ์ของข้อมูลที่มีความถี่เพิ่มขึ้นจากข้อมูลตัวแรกเป็นร้อยละที่มีค่าคงที่และเพิ่มขึ้นเท่ากันของข้อมูลตัวถัดไปทำให้พบว่า เมื่อนำเสนอข้อมูลด้วยฮิสโทแกรมจะทำให้ได้พื้นที่ใต้ฮิสโทแกรมเป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมูมฉาก จากข้อสังเกตนี้เป็นจุดเริ่มต้นในการหาความสัมพันธ์ของตัวแปรต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องนำไปสู่การคำนวณหาสูตรลบบคณิต พิชิตเงินล้าน ด้วยสูตรพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมคางหมูมฉากและการแก้สมการกำลังสองตัวแปรเดียว เมื่อดำเนินการตรวจสอบสูตรหส์ลับ ด้วยโปรแกรม GSP พบว่า ในการตรวจสอบคำตอบหส์ลับ ได้ผลลัพธ์ที่ถูกต้อง ทำให้ทราบว่า จากการหาความสัมพันธ์ของตัวแปรต่าง ๆ โดยใช้สูตรการ

หาพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมคางหมูมุมฉากและการแก้สมการกำลังสองตัวแปรเดียวทำให้ได้ สูตรรหัสลับ เป็นสูตรทางคณิตศาสตร์ที่ถูกต้องและสามารถนำไปใช้ได้จริง

5.3 ข้อเสนอแนะ

1. สูตรรหัสลับ เป็นสูตรลับที่ใช้ได้ในกรณีข้อมูลที่เพิ่มขึ้นหรือลดลงอย่างเป็นลำดับ หากไม่ตรงกับเงื่อนไขที่กำหนดอาจมีค่าที่เปลี่ยนแปลงไป ดังนั้นควรศึกษาวิธีการหาสูตรรหัสลับ ในกรณีเงื่อนไขอื่น ที่หลากหลาย
2. สามารถตรวจสอบสูตรรหัสลับ ด้วยโปรแกรมอื่น ๆ ได้ โดยไม่จำเป็นต้องใช้โปรแกรม GSP เช่น โปรแกรม Excel เป็นต้น
3. นำสูตรรหัสลับ ประกอบในการสร้าง แอปพลิเคชัน เพื่อประยุกต์ใช้ในชีวิตจริง เช่น การออม การลงทุน การวางแผนออมเงินหลังวัยเกษียณ การพยากรณ์เงินเดือน การชำระหนี้ เงินกู้ ฯลฯ

บรรณานุกรม

- กระทรวงศึกษาธิการ. (2560). **มาตรฐานการเรียนรู้และตัวชี้วัด กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์ และสาระภูมิศาสตร์ ในกลุ่มสาระการเรียนรู้สังคมศึกษา ศาสนา และวัฒนธรรม (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551.** กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์ชุมนุมสหกรณ์การเกษตรแห่งประเทศไทย.
- กรมวิชาการ กระทรวงศึกษาธิการ. (2551) **คู่มือจัดการเรียนรู้ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์.** กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์องค์การรับส่งสินค้าและพัสดุภัณฑ์.
- โครงการสารานุกรมไทยสำหรับเยาวชน โดยพระราชประสงค์ในพระบาทสมเด็จพระเจ้าอยู่หัว.(2551) **สารานุกรมไทยสำหรับเยาวชน เล่ม 6 (คณิตศาสตร์) / โครงการสารานุกรมไทยสำหรับเยาวชน โดยพระราชประสงค์ในพระบาทสมเด็จพระเจ้าอยู่หัว.** กรุงเทพฯ: ด่านสุทธาการพิมพ์.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ. (2563) **หนังสือเรียนรายวิชา รายวิชาพื้นฐาน คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 เล่ม 2.** กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์ สกสศ. ลาดพร้าว
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ. (2563) **หนังสือเรียนรายวิชา รายวิชาพื้นฐาน คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เล่ม 1.** กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์ สกสศ. ลาดพร้าว
- BYJU’S The Learning App. “Trapezoids”. [ออนไลน์].เข้าถึงได้จาก :
<https://byjus.com/maths/trapezoids/> (วันที่สืบค้นข้อมูล 5 สิงหาคม 2569)
- Marucakporkaerm. “โปรแกรม GSP”. [ออนไลน์].เข้าถึงได้จาก :
<https://sites.google.com/site/marucakporkaermgspkan/> (วันที่สืบค้น 5 สิงหาคม 2569)

ภาคผนวก ตัวอย่างโปรแกรม GSP ในการตรวจสอบคำตอบสูตรห้กลับ

The Geometer's Sketchpad By KrabiGsp - [คณิตศาสตร์ด้วยGSP - 2]

เพิ่ม แก้ไข แสดงผล สร้าง การแปลง การวัด ส่วนต่อ กราฟ หน้าต่าง ช่วยเหลือ

$y1 = 1000$
 $p = 0.50$
 $A = 1000000$

$$n = \left(\frac{-(2 \cdot y1 - p \cdot y1) + \sqrt{((2 \cdot y1 - p \cdot y1)^2) + 8 \cdot p \cdot y1 \cdot A}}{2 \cdot p \cdot y1} \right) = 61.76$$

n

y1	p	A	$\left(\frac{-(2 \cdot y1 - p \cdot y1) + \sqrt{((2 \cdot y1 - p \cdot y1)^2) + 8 \cdot p \cdot y1 \cdot A}}{2 \cdot p \cdot y1} \right)$
100	0.10	1000	7.54
100	0.10	10000	36.22
100	0.10	100000	132.24
100	0.10	1000000	437.81
1000	0.10	1000000	132.24
1000	0.20	1000000	95.60
1000	0.30	1000000	78.87
1000	0.40	1000000	68.74
1000	0.50	1000000	61.76

1 2

B I U $\frac{1}{x}$

The Geometer's Sketchpad By KrabiGsp - [คณิตศาสตร์ด้วยGSP - 1]

เพิ่ม แก้ไข แสดงผล สร้าง การแปลง การวัด ส่วนต่อ กราฟ หน้าต่าง ช่วยเหลือ

$y1 = 100.0$
 $p = 0.10$
 $n = 440.00$

$$y_n = y1 + (n - 1) \cdot p \cdot y1 = 4490.00$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot y1 + (n - 1) \cdot p \cdot y1) \cdot n = 1.01 \cdot 10^6$$

y_n **A**

y1	p	n	$y1 + (n - 1) \cdot p \cdot y1$	$\frac{1}{2} \cdot (2 \cdot y1 + (n - 1) \cdot p \cdot y1) \cdot n$
100.0	0.10	1.00	100.00	100.00
100.0	0.10	2.00	110.00	210.00
100.0	0.10	3.00	120.00	330.00
100.0	0.10	4.00	130.00	460.00
100.0	0.10	5.00	140.00	600.00
100.0	0.10	6.00	150.00	750.00
100.0	0.10	7.00	160.00	910.00
100.0	0.10	8.00	170.00	1080.00
100.0	0.10	9.00	180.00	1260.00
100.0	0.10	10.00	190.00	1450.00
100.0	0.10	437.00	4460.00	996360.00
100.0	0.10	438.00	4470.00	1.00·10 ⁶
100.0	0.10	439.00	4480.00	1.01·10 ⁶
100.0	0.10	440.00	4490.00	1.01·10 ⁶

1 2

B I U $\frac{1}{x}$