

โครงการคณิตศาสตร์

เรื่อง

การหารัศมีของวงกลมแนบในรูปสามเหลี่ยมใด ๆ
(The Inradius Formula for a General Triangle)

โดย

1. นายณวัฒน์ ศรีรักษา
2. นางสาวปัญญ์ตะวัน เพชรโชติ
3. นางสาวอชิรญาณ์ ทองจันทร์

ครูที่ปรึกษาโครงการ
นายณวัฒน์ เอียวประดิษฐ์
นายศุภชัย เรืองเดช

รายงานฉบับนี้เป็นส่วนประกอบของโครงการคณิตศาสตร์
ประเภท ทฤษฎี ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

โรงเรียนพนมศึกษา
สังกัดสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษาสุราษฎร์ธานี ชุมพร

ส่งเข้าประกวด ปี พ.ศ. 2569

ชื่อโครงการ	การหารัศมีของวงกลมแนบในรูปสามเหลี่ยมใด ๆ (The Inradius Formula for a General Triangle)
ชื่อผู้จัดทำ	1. นายณวัฒน์ ศรีรักษา 2. นางสาวปัญญรัตน์ เพชรโชติ 3. นางสาวอชิรญาณ์ ทองจันทร์
ครูที่ปรึกษาโครงการ	1. นายศิริวัฒน์ เอี้ยวประดิษฐ์ 2. นายศุภชัย เรืองเดช
ระดับชั้น	มัธยมศึกษาตอนปลาย
ประเภทโครงการ	สร้างทฤษฎีหรือคำอธิบายทางคณิตศาสตร์

บทคัดย่อ

โครงการคณิตศาสตร์ฉบับนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาและสร้างความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันในการคำนวณหารัศมีของวงกลมแนบในรูปสามเหลี่ยมใด ๆ โดยใช้ระเบียบวิธีวิจัยเชิงเรขาคณิตและพีชคณิตผ่านโปรแกรม Geometer's Sketchpad และ GeoGebra ในการสร้างภาพจำลองตามเงื่อนไข คณะผู้จัดทำได้ใช้ความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์มาร่วมกันวิเคราะห์และแสดงการพิสูจน์อย่างเป็นระบบ

จากการศึกษาพบว่า เมื่อสร้างวงกลมแนบในรูปสามเหลี่ยมใด ๆ และสร้างวงกลมชุดถัดไปเรียงซ้อนกันขึ้นไปหาจุดยอด โดยให้วงกลมแต่ละวงสัมผัสกับด้านประกอบมุมยอดและสัมผัสกับวงกลมก่อนหน้าไปเรื่อย ๆ อย่างไม่มีสิ้นสุด จะเกิดความสัมพันธ์ของอัตราส่วนรัศมีของวงกลมสองวงที่อยู่ติดกัน เป็นค่าคงตัวเท่ากับ $\frac{r_{n+1}}{r_n} = \frac{1 - \sin \theta}{1 + \sin \theta}$ เมื่อ r_n คือ รัศมีของวงกลม O_n และ θ คือ

ครึ่งหนึ่งของมุมยอดของรูป $\triangle ABC$ ความสัมพันธ์ดังกล่าวทำให้สามารถพัฒนาทฤษฎีบท 3.2 ในการคำนวณหารัศมีวงกลมแนบใน r_1 ของรูปสามเหลี่ยมใด ๆ ได้สำเร็จในรูปของฟังก์ชันตรีโกณมิติ คือ $r_1 = \frac{bc \sin 2\theta \sin(\theta + \beta)}{(b+c)(\sin(\theta + \beta) + \sin \theta)}$ หรือ $r_1 = \frac{bc \sin 2\theta \sin(\theta + \alpha)}{(b+c)(\sin(\theta + \alpha) + \sin \theta)}$

นอกจากนี้ คณะผู้จัดทำยังได้ขยายผลทฤษฎีบทไปสู่บทแทรกในกรณีเฉพาะของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วและรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าได้ดังนี้ $r_1 = \frac{b \sin 2\theta}{2(1 + \sin \theta)}$ เมื่อ θ คือ ครึ่งหนึ่งของ

มุมยอดของรูป $\triangle ABC$ และ $r_1 = \frac{b\sqrt{3}}{6}$ โดยที่ b คือ ความยาวด้านประกอบมุมยอด ตามลำดับ ซึ่งให้ผลลัพธ์สอดคล้องตรงกันกับโครงการ ที่ได้คิดค้นเมื่อ พ.ศ. 2567 องค์ความรู้และสูตรทั่วไปที่ได้จากการขยายผลในโครงการนี้

คำสำคัญ: รัศมีวงกลมแนบใน, อนุกรมเรขาคณิตอนันต์, ฟังก์ชันตรีโกณมิติ,

กิตติกรรมประกาศ

โครงการคณิตศาสตร์เรื่อง "การหารัศมีของวงกลมแนบในรูปสามเหลี่ยมใด ๆ (The Inradius Formula for a General Triangle)" ฉบับนี้ สำเร็จลุล่วงได้อย่างสมบูรณ์ด้วยความกรุณาและความช่วยเหลืออย่างดียิ่งจาก คณะครูกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ครูที่ปรึกษาโครงการ ที่ได้มอบแนวคิด ทบทวนหลักการทางคณิตศาสตร์ ตรวจสอบความถูกต้องของบทพิสูจน์ ตลอดจนให้คำแนะนำและแก้ไขข้อบกพร่องต่าง ๆ ด้วยความเอาใจใส่อย่างยิ่ง คณะผู้จัดทำขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูงไว้ ณ โอกาสนี้

ขอขอบพระคุณนางนฤดี ตูลารักษ์ ผู้อำนวยการโรงเรียนพนมศึกษา และคณะครูกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ โรงเรียนพนมศึกษาทุกท่าน ที่ได้สนับสนุนเครื่องมือ เทคโนโลยีคอมพิวเตอร์ และอำนวยความสะดวกในด้านสถานที่ตลอดระยะเวลาการดำเนินงาน

สุดท้ายนี้ ขอกราบขอบพระคุณบิดา มารดา และครอบครัว ที่ให้การสนับสนุนด้านทุนทรัพย์ และเป็นกำลังใจสำคัญ รวมถึงเพื่อน ๆ สมาชิกทุกคนที่มีส่วนร่วมในการแลกเปลี่ยนความคิดเห็นและช่วยเหลือจนโครงการชิ้นนี้สำเร็จลงได้ด้วยดี

คณะผู้จัดทำ

21 กรกฎาคม 2569

สารบัญ

เรื่อง	หน้า
บทคัดย่อ	ก
กิตติกรรมประกาศ	ข
สารบัญ	ค
บทที่ 1 บทนำ	1
บทที่ 2 เอกสารที่เกี่ยวข้อง	3
บทที่ 3 วิธีการดำเนินการ	6
บทที่ 4 ผลการดำเนินการ	18
บทที่ 5 สรุป อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ	20
บรรณานุกรม	22
ภาคผนวก ก หลักฐานการเผยแพร่ผลงานเดิม	23
ภาคผนวก ข ผลการสำรวจผ่านโปรแกรม GSP 5 (The Geometer's Sketchpad 5) และโปรแกรม GeoGebra	26

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความเป็นมา

เรขาคณิตเป็นแขนงหนึ่งของคณิตศาสตร์ที่มีบทบาทสำคัญในการอธิบายรูปทรงและโครงสร้างต่าง ๆ ในธรรมชาติ โดยหนึ่งในรูปทรงพื้นฐานที่มีการศึกษากันอย่างแพร่หลายคือรูปสามเหลี่ยมและการแนบในของวงกลม (Incircle) ซึ่งองค์ความรู้เกี่ยวกับการหารัศมีของวงกลมแนบในรูปสามเหลี่ยม (Inradius) ไม่เพียงแต่เป็นหัวข้อที่น่าสนใจในทางเรขาคณิตเชิงทฤษฎีเท่านั้น แต่ยังถูกนำไปประยุกต์ใช้อย่างกว้างขวางในศาสตร์ต่าง ๆ เช่น การออกแบบสถาปัตยกรรม การคำนวณโครงสร้างทางวิศวกรรม และการคำนวณพิกัดทางภูมิศาสตร์ในอดีตที่ผ่านมา การหารัศมีของวงกลมแนบในรูปสามเหลี่ยมใด ๆ มีสูตรมาตรฐานที่แพร่หลายและเป็นสากล โดยอาศัยความสัมพันธ์ระหว่างพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมและครึ่งหนึ่งของเส้นรอบรูป (Semiperimeter) ดังสมการ

$$r = \frac{\Delta}{s}$$

เมื่อ Δ แทน พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม และ $s = \frac{a+b+c}{2}$ แทน ครึ่งหนึ่งของเส้นรอบรูปสามเหลี่ยม แม้ว่าสูตรดังกล่าวจะเป็นที่ยอมรับและใช้กันอย่างแพร่หลาย แต่การคำนวณจำเป็นต้องทราบพิกัดของพื้นที่หรือความยาวด้านครบทั้งสามด้านก่อน จึงจะสามารถหาค่ารัศมีออกมาได้

ต่อมา คณะผู้จัดทำได้ศึกษาโครงงานคณิตศาสตร์ของรุ่นพี่ที่ได้เคยคิดค้นและทำไว้เมื่อ พ.ศ. 2567 ในเรื่อง “การหารัศมีของวงกลมแนบในรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว (Radius of Incircle in Isosceles Triangle)” ซึ่งนับเป็นการพัฒนาทางเลือกใหม่ในการคำนวณหารัศมีวงกลมแนบในด้วยวิธีการสร้างวงกลมชุดถัดไปเรียงซ้อนกันขึ้นไปหาจุดยอดอย่างไม่สิ้นสุด โดยอาศัยความรู้เรื่องสามเหลี่ยมคล้าย อัตราส่วนตรีโกณมิติ และการลู่อเข้าของอนุกรมเรขาคณิตอนันต์ในการพิสูจน์ แต่อย่างไรก็ตาม สูตรเชิงฟังก์ชันตรีโกณมิติที่รุ่นพี่ได้พัฒนาไว้ในโครงงานเดิมนั้น ยังมีข้อจำกัดที่สำคัญคือ ถูกออกแบบมาให้ใช้คำนวณได้เฉพาะในกรณีของรูปสามเหลี่ยมที่มีลักษณะสมมาตรอย่างรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วเท่านั้น ไม่สามารถนำไปประยุกต์ใช้โดยตรงกับรูปสามเหลี่ยมใด ๆ (General Triangle) ที่มีความยาวด้านและมุมภายในแต่ละมุมไม่เท่ากันได้

ด้วยเหตุนี้ ในโครงงานปัจจุบัน คณะผู้จัดทำจึงมีแนวคิดที่จะพัฒนาและขยายผลองค์ความรู้ดังกล่าวให้มีความเป็นสากลและครอบคลุมยิ่งขึ้น เพื่อทลายข้อจำกัดของงานวิจัยเดิม โดยการศึกษาการหารัศมีของวงกลมแนบในรูปสามเหลี่ยมใด ๆ ผ่านการจำลองภาพและตรวจสอบความสัมพันธ์ด้วยโปรแกรม Geometer's Sketchpad (GSP) และ GeoGebra แล้วนำมาดำเนินการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ด้วยการบูรณาการความรู้เรื่องตรีโกณมิติและอนุกรมเรขาคณิตอนันต์ เพื่อสร้างเป็นทฤษฎีบททั่วไป (Generalized Theorem) ที่สามารถคำนวณหารัศมีของวงกลมแนบในรูปสามเหลี่ยมใด ๆ ได้อย่างแม่นยำจากความยาวด้านและมุมภายใน พร้อมทั้งตรวจสอบความสอดคล้องของทฤษฎีบท

ใหม่โดยการลดรูป (Reduction) ไปสู่บทแทรกในกรณีของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วและรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า องค์ความรู้ที่ได้จากโครงการปัจจุบันนี้จึงเป็นการสร้างเครื่องมือทางคณิตศาสตร์บทใหม่ที่มีประสิทธิภาพและมีความเป็นสากลมากยิ่งขึ้น

1.2 วัตถุประสงค์

1. เพื่อศึกษาและสร้างภาพจำลองพลวัตในการหาความสัมพันธ์ของรัศมีวงกลมแนบในรูปสามเหลี่ยมใด ๆ โดยใช้โปรแกรม Geometer's Sketchpad (GSP) และ GeoGebra
2. เพื่อแสดงการพิสูจน์และสร้างทฤษฎีบททั่วไป (Generalized Theorem) ในการคำนวณหารัศมีของวงกลมแนบในรูปสามเหลี่ยมใด ๆ โดยการบูรณาการความรู้เรื่องสามเหลี่ยมคล้าย อัตราส่วนตรีโกณมิติ และอนุกรมเรขาคณิตอนันต์
3. เพื่อขยายผลและตรวจสอบความสอดคล้องของทฤษฎีบททั่วไปไปสู่บทแทรกในกรณีเฉพาะของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วและรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า

1.3 ขอบเขตของโครงการ

1. ขอบเขตด้านเนื้อหา

- 1.1 ศึกษาและสร้างทฤษฎีบททั่วไปในการคำนวณหารัศมีของวงกลมแนบในรูปสามเหลี่ยมใด ๆ (General Triangle) จากความยาวด้านประชิดมุมยอดและมุมภายใน
- 1.2 ศึกษาความสัมพันธ์ของอัตราส่วนรัศมีของวงกลมแนบในที่เรียงซ้อนกันเป็นอนุกรมอนันต์เข้าสู่จุดยอดของรูปสามเหลี่ยม
- 1.3 ศึกษาการลดรูปทฤษฎีบททั่วไปไปสู่กรณีเฉพาะ ได้แก่ รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วและรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า
- 1.4 เนื้อหาคณิตศาสตร์ที่ใช้บูรณาการอ้างอิงตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พ.ศ. 2551 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) ได้แก่ เรื่องสามเหลี่ยมคล้าย อัตราส่วนตรีโกณมิติ และอนุกรมเรขาคณิตอนันต์

2. ขอบเขตด้านระยะเวลา

- 2.1 ดำเนินการศึกษาและจัดทำโครงการในภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2569

1.4 ผลที่คาดว่าจะได้รับ

1. ได้องค์ความรู้ใหม่ในลักษณะทฤษฎีบททั่วไป (Generalized Theorem) ที่เป็นสูตรฟังก์ชันตรีโกณมิติ สำหรับคำนวณหารัศมีของวงกลมแนบในรูปสามเหลี่ยมใด ๆ ได้สำเร็จ
2. สามารถขยายข้อจำกัดของโครงการเดิม โดยได้บทแทรกทางคณิตศาสตร์ที่พิสูจน์ยืนยันความถูกต้องเชิงทฤษฎีในกรณีเฉพาะของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วและรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า
3. สมาชิกผู้จัดทำโครงการได้รับการพัฒนาทักษะกระบวนการคิดเชิงคณิตศาสตร์ขั้นสูง การพิสูจน์อย่างมีเหตุผล และการบูรณาการความรู้เรขาคณิต พีชคณิต และอนุกรมเข้าด้วยกันเพื่อแก้ปัญหา

บทที่ 2

เอกสารที่เกี่ยวข้อง

ในการจัดทำโครงงานคณิตศาสตร์ เรื่อง การหารัศมีของวงกลมแนบในรูปสามเหลี่ยมใด ๆ (The Inradius Formula for a General Triangle) โดยผู้จัดทำได้แสดงลำดับของบทนิยาม และ ทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องไว้ดังต่อไปนี้

บทนิยาม 2.1 รูปสามเหลี่ยม ABC คือ รูปที่ประกอบด้วยส่วนของเส้นตรงสามเส้น $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ และ $\overline{AC}$ เชื่อมต่อกันด้วยจุด A จุด B และจุด C ที่ไม่อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน เรียกจุด A จุด B และจุด C ว่าจุดยอดของรูปสามเหลี่ยม ABC และเรียก $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ และ $\overline{AC}$ ว่า ด้านของรูปสามเหลี่ยม ABC เพื่อความสะดวก เขียน $\triangle ABC$ แทนคำว่า “รูปสามเหลี่ยม ABC ”

บทนิยาม 2.2 วงกลมแนบใน (Incircle) คือ วงกลมที่สัมผัสกับด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม

ทฤษฎีบท 2.3 เส้นแบ่งครึ่งมุมยอดของรูปสามเหลี่ยม จะพบกันที่จุดจุดหนึ่ง จุดนั้นเป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมแนบในรูปสามเหลี่ยมนั้น

ทฤษฎีบท 2.4 รัศมีของวงกลมแนบในรูปสามเหลี่ยมที่มีทั้งความยาวด้าน a , b และ c คือ $r = \frac{\Delta}{s}$

เมื่อ Δ แทน พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม และ $s = \frac{a+b+c}{2}$

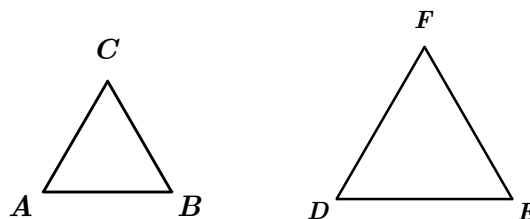
บทนิยาม 2.5 รูปสามเหลี่ยมที่มีด้านยาวเท่ากันสองด้าน และมุมที่ฐานมีขนาดเท่ากัน เรียกว่า “รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว”

บทนิยาม 2.6 รูปสามเหลี่ยมที่มีด้านยาวเท่ากันทั้งสามด้าน และมีขนาดของมุมแต่ละมุมเท่ากับ 60° องศา เรียกว่า “รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า”

บทนิยาม 2.7 ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการแล้ว ด้านและมุมของรูปสามเหลี่ยมทั้งสองมีขนาดเท่ากันเป็นคู่ ๆ กล่าวคือ มีด้านที่ยาวเท่ากันสามคู่ ด้านต่อด้าน และมีมุมที่มีขนาดเท่ากันสามคู่ มุมต่อมุม

ทฤษฎีบท 2.8 ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปใด ๆ มีมุมที่มีขนาดเท่ากันสองคู่ และด้านซึ่งเป็นแขนของมุมร่วมของมุมทั้งสองที่มีขนาดเท่ากันยาวเท่ากันด้วยแล้ว รูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นจะเท่ากันทุกประการ

บทนิยาม 2.9 รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีมุมเท่ากันสามคู่ เรียกว่า “รูปสามเหลี่ยมคล้ายกัน”



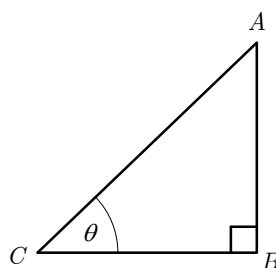
จะได้ $\hat{A} = \hat{D}$, $\hat{B} = \hat{E}$ และ $\hat{C} = \hat{F}$

ดังนั้น $\triangle ABC$ และ $\triangle DEF$ เป็นรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกัน แทนด้วย $\triangle ABC \sim \triangle DEF$

รูปสามเหลี่ยมคล้ายสองรูป มีด้านสมนัย (corresponding side) เป็นสัดส่วนกัน

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$$

บทนิยาม 2.10 อัตราส่วนตรีโกณมิติ คือ อัตราส่วนระหว่างความยาวของด้านทั้งสองด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก



โดยที่ $\sin \theta = \frac{AB}{AC}$ $\cos \theta = \frac{BC}{AC}$ $\tan \theta = \frac{AB}{CB}$

ทฤษฎีบท 2.11 ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงซึ่งเป็นสองเท่าของ θ แสดงได้ ดังนี้

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} ; \tan^2 \theta \neq 1$$

ทฤษฎีบท 2.12 สมบัติของฟังก์ชันตรีโกณมิติสำหรับมุมประกอบสองมุมฉาก นั่นคือ

$$\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$$

$$\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$$

ทฤษฎีบท 2.13 กำหนดรูปสามเหลี่ยม $\triangle ABC$ มีเส้น $\overline{AD}$ เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุมยอด A โดยที่มีด้านประกอบมุมยอดยาว b และ c ตามลำดับ และมุม A มีขนาด θ ถ้า l_a แทนความยาวของเส้นแบ่งครึ่งมุม A แล้ว $l_a = \frac{2bc \cos \theta}{b + c}$

บทแทรก 2.14 เส้นสัมผัสสองเส้นที่ลากจากจุดภายนอกมายังวงกลมวงหนึ่ง จะยาวเท่ากัน และรองรับมุมที่จุดศูนย์กลางเท่ากัน

บทนิยาม 2.15 ลำดับ คือ ฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซตของ $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ หรือมีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวก เรียกลำดับที่มีโดเมนเป็นเซตของ $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ ว่า “ลำดับจำกัด” และ เรียกลำดับที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวกว่า “ลำดับอนันต์”

บทนิยาม 2.16 ลำดับที่มีอัตราส่วนของพจน์ที่ $n + 1$ ต่อพจน์ที่ n เป็นค่าคงตัวที่เท่ากันทุกจำนวนเต็มบวก n เรียกลำดับนี้ว่า “ลำดับเรขาคณิต” และเรียกค่าคงตัวนั้นว่า “อัตราส่วนร่วม”

บทนิยาม 2.17 ผลบวกของลำดับ เรียกว่า อนุกรม

ทฤษฎีบท 2.18 กำหนดให้ a_n เป็นลำดับเรขาคณิต ถ้า a_1 เป็นพจน์แรกของลำดับ และ r เป็นอัตราส่วนร่วม แล้ว $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = \frac{a_1}{1 - r}$ โดยที่ $|r| < 1$

บทที่ 3

วิธีการดำเนินการ

ในการจัดทำโครงงาน เรื่อง การหารัศมีของวงกลมแนบในรูปสามเหลี่ยมใด ๆ (The Inradius Formula for a General Triangle) มีขั้นตอนการสร้างภาพตามเงื่อนไข และวิธีการดำเนินงาน ดังนี้

- 3.1 วัสดุ/อุปกรณ์
- 3.2 ขั้นตอนการดำเนินการ
- 3.3 วิธีการดำเนินการ

3.1 วัสดุ/อุปกรณ์

- 3.1.1 คอมพิวเตอร์สำหรับโปรแกรม Geometer's Sketchpad
- 3.1.2 Chromebook สำหรับโปรแกรม Geogebra

3.2 ขั้นตอนการดำเนินการ

3.2.1 จัดตั้งกลุ่มโครงงานคณิตศาสตร์ ซึ่งประกอบด้วยสมาชิก 3 คน จากนั้นจะประชุมวางแผนเพื่อกำหนดหัวข้อโครงงาน และแบ่งหน้าที่ให้สมาชิกในกลุ่มรับผิดชอบในแต่ละส่วน

3.2.2 สรุปรื่องที่ต้องศึกษา โดยสมาชิกในกลุ่มมีความเห็นว่าจะทำการศึกษาต่อจากปัญหาทางคณิตศาสตร์

3.2.3 ครูที่ปรึกษา ศึกษา ค้นคว้า หาแนวทางการดำเนินการ ร่วมกันวิเคราะห์ วางแผน และหาแนวทางการพัฒนาเพื่อต่อยอดความรู้ที่ทำการศึกษา

3.2.4 กำหนดแนวทางการพัฒนา โดยจะใช้ความรู้เรื่อง สามเหลี่ยมคล้าย อัตราส่วนตรีโกณมิติ และอนุกรมเรขาคณิตอนันต์ ซึ่งเป็นเนื้อหาตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พ.ศ. 2551 ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560

3.2.5 จัดทำเค้าโครงโครงงาน และนำไปปรึกษาต่อครูที่ปรึกษาโครงงาน เพื่อนำคำแนะนำและข้อเสนอแนะไปปรับใช้ในการจัดทำโครงงาน

3.2.6 แก้ไข ปรับปรุงเค้าโครงโครงงาน และนำเสนอต่อครูที่ปรึกษาเพื่อนำคำแนะนำและข้อเสนอแนะไปปรับใช้ในการจัดทำโครงงาน

3.2.7 ดำเนินการคำนวณทางคณิตศาสตร์ เพื่อแสดงการพิสูจน์การหารัศมีแนบในวงกลมของรูปสามเหลี่ยมใด ๆ โดยใช้ความรู้เรื่อง สามเหลี่ยมคล้าย อัตราส่วนตรีโกณมิติ และอนุกรมเรขาคณิตอนันต์

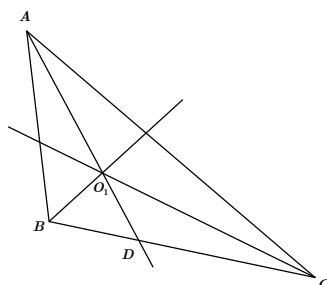
3.2.8 สรุปผลการดำเนินงาน ประชุมอภิปรายผลการดำเนินงาน รวมถึงปัญหาต่าง ๆ ร่วมกับครูที่ปรึกษาโครงงาน เพื่อนำคำแนะนำ ข้อคิดเห็น ข้อเสนอแนะไปปรับปรุงแก้ไข

3.2.9 ตรวจสอบความถูกต้อง ความสมบูรณ์ของโครงงาน และจัดพิมพ์เล่มโครงงานฉบับสมบูรณ์

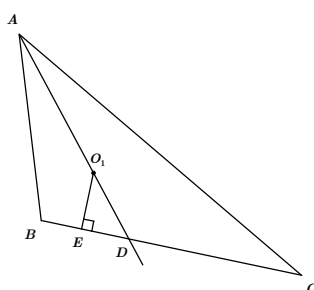
3.3 วิธีการดำเนินการ

การสร้างรูปวงกลมแนบในรูปสามเหลี่ยม

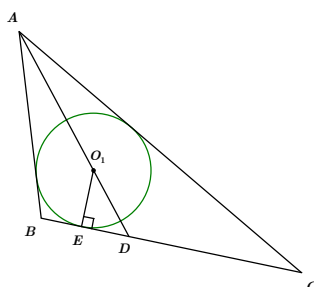
1. สร้างรังสีแบ่งครึ่งมุม $\widehat{BAC}$, $\widehat{ABC}$ และ $\widehat{ACB}$ ตัดกันที่จุด



2. ลากส่วนของเส้นตรงจากจุด O_1 ตั้งฉากกับ $\overline{BC}$ ที่จุด E

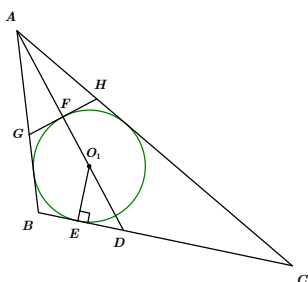


3. เนื่องจาก $\overline{O_1E} \perp \overline{BC}$ ดังนั้น สร้างวงกลม O_1 โดยมีรัศมียาว O_1D หน่วย

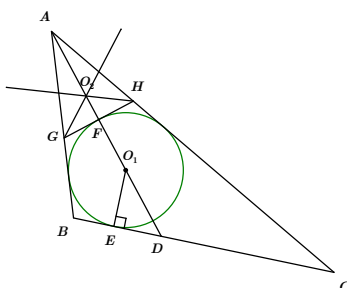


การสร้างรูปวงกลมสัมผัสสองวงกลมแนบในรูปสามเหลี่ยมใด ๆ

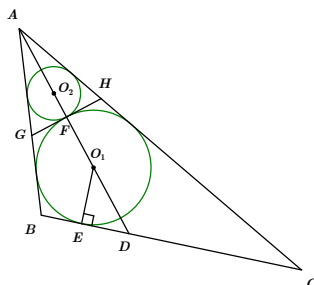
1. ให้ $\overline{AD}$ ตัดวงกลม O_1 ที่จุด F สร้างส่วนของเส้นตรงผ่านจุด F และตั้งฉากกับ $\overline{AD}$ ตัดกับ $\overline{AB}$ ที่จุด G และตัดกับ $\overline{AC}$ ที่จุด H ตามลำดับ จะได้สามเหลี่ยม AGH เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว



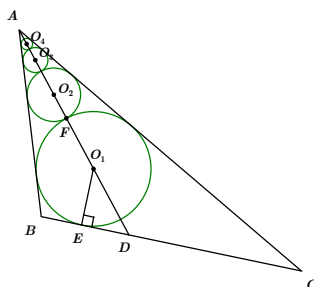
2. สร้างรังสีแบ่งครึ่งมุม $\widehat{AHG}$ และ $\widehat{AGH}$ ตัดกันที่จุด O_2



3. เนื่องจาก $\overline{AF}$ เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุม $\widehat{BAC}$ ดังนั้น $\overline{AF} \perp \overline{GH}$ สร้างวงกลม O_2 โดยมีรัศมียาว O_2F หน่วย

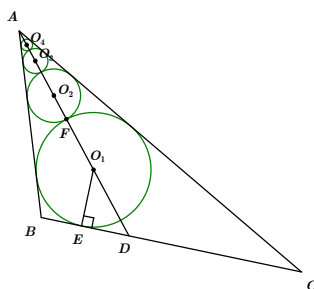


4. ทำซ้ำขั้นตอนที่ 1 - 3 ต่อไปเรื่อย ๆ จะได้

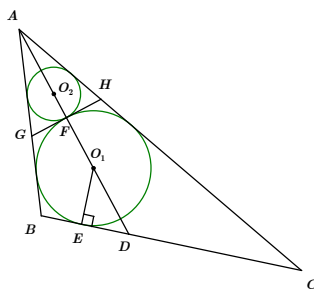


โดยให้วงกลม O_1, O_2 และ O_3 มีรัศมียาว r_1, r_2 และ r_3 หน่วย ตามลำดับ และกำหนดให้วงกลม O_n มีรัศมียาว r_n หน่วย

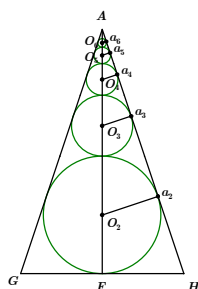
บทตั้ง 3.1 กำหนดให้ $\triangle ABC$ รูปสามเหลี่ยมหน้าใด ๆ ถ้า O_1 เป็นวงกลมแนบใน $\triangle ABC$ และ O_n เป็นวงกลมที่มีเส้นผ่านศูนย์กลางอยู่บนเส้นแบ่งครึ่งมุมของ $\widehat{BAC}$ สัมผัสกับด้านประกอบมุม $\widehat{BAC}$ และสัมผัสกับวงกลม O_{n+1} โดยที่ $\frac{r_2}{r_1} = \frac{r_3}{r_2} = \frac{r_4}{r_3} = \dots = \frac{r_{n+1}}{r_n}$ เมื่อ r_n คือ รัศมีของวงกลม O_n แล้ว $\frac{r_{n+1}}{r_n} = \frac{1 - \sin \theta}{1 + \sin \theta}$ เมื่อ θ คือ ครึ่งหนึ่งของมุมยอดของรูป $\triangle ABC$



พิสูจน์ กำหนดให้จุด F เป็นจุดที่วงกลม O_1 และวงกลม O_2 สัมผัสกัน ลากส่วนของเส้นตรง $\overline{GH}$ ผ่านจุด F ตัดกับ $\overline{AB}$ ที่จุด G และตัดกับ $\overline{AC}$ ที่จุด H ตามลำดับ ดังรูป



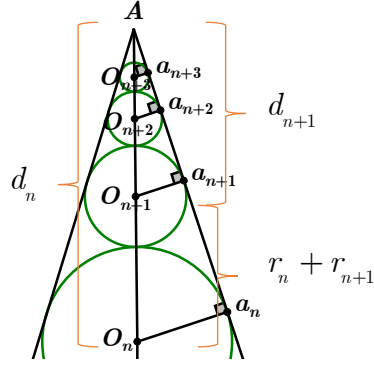
ส่งผลให้วงกลม O_2 แนบในสามเหลี่ยม AGH และลากจุด O_2 ตั้งฉากกับ $\overline{AG}$ และ $\overline{AH}$ ที่จุด I และ J ตามลำดับ พิจารณา $\triangle AGH$ จะได้ ดังรูป



- | | | |
|-----------|--|----------------------------------|
| เนื่องจาก | 1. $\widehat{GAF} = \widehat{HAF} = \theta$ | (ครึ่งมุมยอด) |
| | 2. $AF = AF$ | (ด้านร่วม) |
| | 3. $\widehat{AFG} = \widehat{AFH} = \frac{\pi}{2}$ | (มุมที่จุดสัมผัสของวงกลม O_2) |

นั่นคือ $\triangle AFG \cong \triangle AFH$ แบบมุม - ด้าน - มุม ดังนั้น $AG = AH$
 เพราะฉะนั้น $\triangle AGH$ เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

กำหนดให้ d_n แทน ระยะจากจุดยอด A ถึงจุดศูนย์กลาง O_n จะได้ว่า $\triangle AO_2a_2$
 $\sim \triangle AO_3a_3 \sim \triangle AO_4a_4 \sim \dots \sim \triangle AO_na_n$



เนื่องจาก θ คือ ครึ่งหนึ่งของมุมยอดของรูป $\widehat{BAC}$

พิจารณา $\triangle AO_na_n$ จะได้ $\sin \theta = \frac{r_n}{d_n}$ นั่นคือ $d_n = \frac{r_n}{\sin \theta}$

ในทำนองเดียวกัน จะได้ $d_{n+1} = \frac{r_{n+1}}{\sin \theta}$

เพราะฉะนั้น

$$d_n - d_{n+1} = r_{n+1} + r_n$$

$$\begin{aligned} \frac{r_n}{\sin \theta} - \frac{r_{n+1}}{\sin \theta} &= r_n + r_{n+1} \\ \sin \theta \left(\frac{r_n - r_{n+1}}{\sin \theta} \right) &= \sin \theta (r_n + r_{n+1}) \end{aligned}$$

$$r_n - r_{n+1} = r_n \sin \theta + r_{n+1} \sin \theta$$

$$r_n - r_n \sin \theta = r_{n+1} + r_{n+1} \sin \theta$$

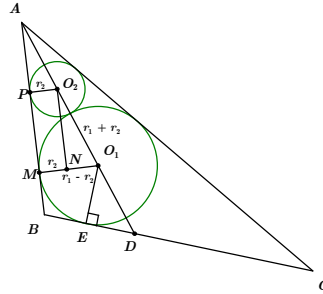
$$r_n (1 - \sin \theta) = r_{n+1} (1 + \sin \theta)$$

$$\frac{r_{n+1}}{r_n} = \frac{1 - \sin \theta}{1 + \sin \theta}$$

ดังนั้น ในสามเหลี่ยมหน้าจั่ว AGH จะได้ความสัมพันธ์ของรัศมีของวงกลมที่สัมผัสกัน

คือ $\frac{r_{n+1}}{r_n} = \frac{1 - \sin \theta}{1 + \sin \theta}$ สำหรับ n เป็นจำนวนเต็มบวก

พิจารณา $\triangle ABC$ ลากส่วนของเส้นตรงจากจุด O_1 ตั้งฉากกับ $\overline{AB}$ ที่จุด M และ ลากส่วนของเส้นตรงจากจุด O_2 ตั้งฉากกับ $\overline{O_1M}$ ที่จุด N ทำให้เกิด $\triangle O_1MO_2$ และลากส่วนของเส้นตรงจากจุด O_2 ตั้งฉากกับ $\overline{AB}$ ที่จุด P ดังภาพ



จะได้ $O_1O_2 = r_1 + r_2$, $NO_1 = r_1 - r_2$ และเนื่องจาก $\triangle NO_2O_1 \sim \triangle MAO_1$
จะได้ $\widehat{NO_2O_1} = \widehat{MAO_1} = \theta$

เพราะฉะนั้น

$$\sin \theta = \frac{O_1O_2}{NO_1}$$

$$\sin \theta = \frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2}$$

$$(\sin \theta)(r_1 + r_2) = r_1 - r_2$$

$$r_1 \sin \theta + r_2 \sin \theta = r_1 - r_2$$

$$r_2 + r_2 \sin \theta = r_1 - r_1 \sin \theta$$

$$r_2(1 + \sin \theta) = r_1(1 - \sin \theta)$$

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{1 - \sin \theta}{1 + \sin \theta}$$

จึงได้ว่า สำหรับ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า $\frac{r_{n+1}}{r_n} = \frac{1 - \sin \theta}{1 + \sin \theta}$ เมื่อ θ คือ

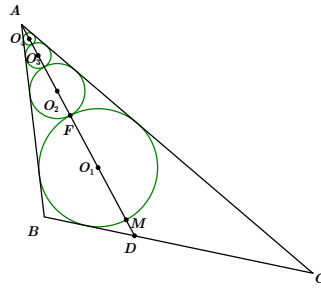
ครึ่งหนึ่งของมุมยอดของรูป $\triangle ABC$



ทฤษฎีบท 3.2 กำหนดให้ วงกลม O_1 เป็นวงกลมแนบใน $\triangle ABC$ ใด ๆ ที่มีมุมภายในตรงจุดยอด A มีขนาด 2θ และมีมุมภายในตรงจุดยอด B และ C มีขนาด β และ α ตามลำดับ โดยมีด้านตรงข้ามมุม A, B และ C ยาว a, b และ c ตามลำดับ

$$\text{ถ้า } r_1 \text{ คือ รัศมีของวงกลม } O_1 \text{ แล้ว } r_1 = \frac{bc \sin 2\theta \sin(\theta + \beta)}{(b + c)(\sin(\theta + \beta) + \sin \theta)}$$

$$\text{หรือ } r_1 = \frac{bc \sin 2\theta \sin(\theta + \alpha)}{(b + c)(\sin(\theta + \alpha) + \sin \theta)}$$



พิสูจน์ จากรูป $\triangle ABC$ กำหนดให้ $\overline{AD}$ แทน เส้นแบ่งครึ่งมุมของรูป $\triangle ABC$
แต่เนื่องจาก $AD = AM + MD$

$$\text{พิจารณา } AM = 2r_1 + 2r_2 + 2r_3 + \dots$$

$$= 2(r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + \dots)$$

$$= 2 \left(r_1 + \left(\frac{1 - \sin \theta}{1 + \sin \theta} \right) r_1 + \left(\frac{1 - \sin \theta}{1 + \sin \theta} \right)^2 r_1 + \dots \right)$$

$$= 2r_1 \left(1 + \left(\frac{1 - \sin \theta}{1 + \sin \theta} \right) + \left(\frac{1 - \sin \theta}{1 + \sin \theta} \right)^2 + \dots \right)$$

$$= 2r_1 \left(\frac{1}{1 - \left(\frac{1 - \sin \theta}{1 + \sin \theta} \right)} \right) \quad ; \quad \left| \frac{1 - \sin \theta}{1 + \sin \theta} \right| < 1$$

$$= 2r_1 \left(\frac{1 + \sin \theta}{(1 + \sin \theta) - (1 - \sin \theta)} \right)$$

$$= 2r_1 \left(\frac{1 + \sin \theta}{2 \sin \theta} \right)$$

$$AM = \left(\frac{1 + \sin \theta}{2 \sin \theta} \right) r_1 \quad ; \quad \left| \frac{1 - \sin \theta}{1 + \sin \theta} \right| < 1$$

พิจารณา

$$\left| \frac{1 - \sin \theta}{1 + \sin \theta} \right| < 1$$

$$|1 - \sin \theta| < |1 + \sin \theta|$$

$$(1 - \sin \theta)^2 < (1 + \sin \theta)^2$$

$$(1 - \sin \theta)^2 - (1 + \sin \theta)^2 < 0$$

$$[(1 - \sin \theta) + (1 + \sin \theta)][(1 - \sin \theta) - (1 + \sin \theta)] < 0$$

$$(2)(-2 \sin \theta) < 0$$

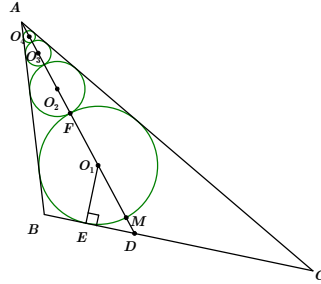
$$-4 \sin \theta < 0$$

$$\sin \theta > 0$$

แต่เนื่องจาก $\sin \theta > 0$ สำหรับทุก $\theta \in (0, \pi)$ เพราะฉะนั้น $\left| \frac{1 - \sin \theta}{1 + \sin \theta} \right| < 1$

สำหรับทุก $\theta \in (0, \pi)$ ดังนั้น $AM = \left(\frac{1 + \sin \theta}{\sin \theta} \right) r_1$

ลากส่วนของเส้นตรงจากจุด O_1 มาตั้งฉากกับ $\overline{BC}$ ที่จุด E ดังรูป



โดยจะแบ่งพิจารณาเป็น 2 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 พิจารณา $\widehat{ADC} = \widehat{DAB} + \widehat{DBA} = \theta + \beta$

ฉะนั้น $\widehat{ADB} = \pi - (\theta + \beta)$

จะได้ $\widehat{ADB} = \widehat{O_1DE} = \pi - (\theta + \beta)$

พิจารณา $\triangle O_1DE$ กำหนดให้ $\overline{MD}$ ยาว x หน่วย

จะได้ $\sin(\pi - (\theta + \beta)) = \frac{O_1E}{O_1D}$

เมื่อพิจารณาตามสมบัติในหัวข้อ 2.5

$$\sin(\theta + \beta) = \frac{O_1E}{O_1D}$$

$$\sin(\theta + \beta) = \frac{O_1E}{O_1M + MD}$$

$$\sin(\theta + \beta) = \frac{r_1}{r_1 + x}$$

$$(r_1 + x)(\sin(\theta + \beta)) = r_1$$

$$r_1 + x = \frac{r_1}{\sin(\theta + \beta)}$$

$$x = \frac{r_1}{\sin(\theta + \beta)} - r_1$$

$$x = \left(\frac{1}{\sin(\theta + \beta)} - 1 \right) r_1$$

$$\text{ดังนั้น } MD = \left(\frac{1}{\sin(\theta + \beta)} - 1 \right) r_1$$

$$\text{และจาก } AD = AM + MD$$

$$= \left(\frac{1 + \sin \theta}{\sin \theta} \right) r_1 + \left(\frac{1}{\sin(\theta + \beta)} - 1 \right) r_1$$

$$= \left(\frac{1}{\sin \theta} + 1 \right) r_1 + \left(\frac{1}{\sin(\theta + \beta)} - 1 \right) r_1$$

$$= \left(\left(\frac{1}{\sin \theta} + 1 \right) + \left(\frac{1}{\sin(\theta + \beta)} - 1 \right) \right) r_1$$

$$= \left(\frac{1}{\sin \theta} + \frac{1}{\sin(\theta + \beta)} \right) r_1$$

แต่เนื่องจาก $\overline{AD}$ เป็นเส้นแบ่งครึ่งจุดยอดของมุม A โดยทฤษฎีบท 2.13 จะได้ว่า

$$AD = \frac{2bc \cos \theta}{b + c}$$

เพราะฉะนั้น
$$\frac{2bc \cos \theta}{b+c} = \left(\frac{1}{\sin \theta} + \frac{1}{\sin(\theta + \beta)} \right) r_1$$

$$\frac{2bc \cos \theta}{b+c} = \left(\frac{\sin(\theta + \beta) + \sin \theta}{\sin \theta \sin(\theta + \beta)} \right) r_1$$

$$r_1 = \frac{2bc \cos \theta \sin \theta \sin(\theta + \beta)}{(b+c)(\sin(\theta + \beta) + \sin \theta)}$$

$$r_1 = \frac{bc(2 \sin \theta \cos \theta) \sin(\theta + \beta)}{(b+c)(\sin(\theta + \beta) + \sin \theta)}$$

$$r_1 = \frac{bc \sin 2\theta \sin(\theta + \beta)}{(b+c)(\sin(\theta + \beta) + \sin \theta)}$$

กรณีที่ 2 พิจารณา $\widehat{ADC} = \pi - (\widehat{DAC} + \widehat{DCA}) = \pi - (\theta + \alpha)$

ฉะนั้น $\widehat{ADB} = \theta + \alpha$

จะได้ $\widehat{ADB} = \widehat{O_1DE} = \theta + \alpha$

พิจารณา $\triangle O_1DE$ กำหนดให้ $\overline{MD}$ ยาว x หน่วย

จะได้
$$\sin(\theta + \alpha) = \frac{O_1E}{O_1D}$$

$$\sin(\theta + \alpha) = \frac{O_1E}{O_1M + MD}$$

$$\sin(\theta + \alpha) = \frac{r_1}{r_1 + x}$$

$$(r_1 + x)(\sin(\theta + \alpha)) = r_1$$

$$r_1 + x = \frac{r_1}{\sin(\theta + \alpha)}$$

$$x = \frac{r_1}{\sin(\theta + \alpha)} - r_1$$

$$x = \left(\frac{1}{\sin(\theta + \alpha)} - 1 \right) r_1$$

ดังนั้น $MD = \left(\frac{1}{\sin(\theta + \alpha)} - 1 \right) r_1$ จากกรณีที่ 1

$$\text{จะได้ } MD = \left(\frac{1}{\sin(\theta + \beta)} - 1 \right) r_1$$

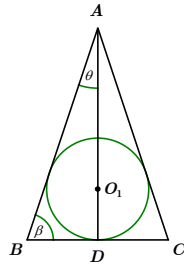
$$\text{นั่นคือ } MD = \left(\frac{1}{\sin(\theta + \beta)} - 1 \right) r_1 = \left(\frac{1}{\sin(\theta + \alpha)} - 1 \right) r_1$$

$$\text{ซึ่งสามารถพิสูจน์ในทำนองเดียวกันได้ว่า } r_1 = \frac{bc \sin 2\theta \sin(\theta + \alpha)}{(b + c)(\sin(\theta + \alpha) + \sin \theta)} \quad \blacksquare$$

ทฤษฎีบท 3.2 ได้แสดงถึงความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันทั่วไปในการหารัศมีของวงกลมแนบในรูปสามเหลี่ยมใด ๆ ไว้อย่างสมบูรณ์แล้ว คณะผู้จัดทำได้นำทฤษฎีบททั่วไปนี้มาประยุกต์ใช้และลดรูปสูตรคณิตศาสตร์ไปสู่กรณีเฉพาะ ดังปรากฏในบทแทรกต่อไป

บทแทรก 3.3 สำหรับรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วใด ๆ ที่มีมุมภายในตรงจุดยอดมีขนาด 2θ และมีด้านประกอบมุมยอดแต่ละด้านยาว b หน่วย หารัศมีของวงกลมแนบในรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว คือ r_1

$$\text{แล้ว } r_1 = \frac{b \sin 2\theta}{2(1 + \sin \theta)}$$



พิสูจน์ จากทฤษฎีบทที่ 3.2 จะได้ $r_1 = \frac{bc \sin 2\theta \sin(\theta + \beta)}{(b + c)(\sin(\theta + \beta) + \sin \theta)}$

แต่เนื่องจาก ด้านประกอบมุมยอดยาวเท่ากัน $AB = AC$ ฉะนั้น $b = c$

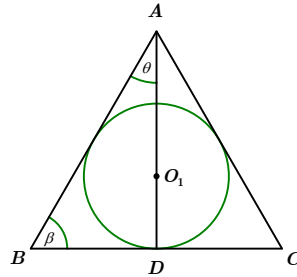
และเนื่องจากเส้นแบ่งครึ่งมุมตั้งฉากกับฐาน จะได้ว่า $\widehat{DAB} + \widehat{ABD} = \theta + \beta = \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{bc \sin 2\theta \sin(\theta + \beta)}{(b + c)(\sin(\theta + \beta) + \sin \theta)} \\ &= \frac{b^2 \sin 2\theta \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{(2b)\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin \theta\right)} \end{aligned}$$

$$r_1 = \frac{b \sin 2\theta}{2(1 + \sin \theta)} \quad \blacksquare$$

บทแทรก 3.4 สำหรับรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า ๆ ถ้ารัศมีของวงกลมแนบในรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว คือ

$$r_1 \text{ แล้ว } r_1 = \frac{b\sqrt{3}}{6}$$



พิสูจน์ จากทฤษฎีบทที่ 3.2 จะได้ $r_1 = \frac{bc \sin 2\theta \sin(\theta + \beta)}{(b + c)(\sin(\theta + \beta) + \sin \theta)}$

แต่เนื่องจาก ด้านประกอบมุมยอดยาวเท่ากันทุกด้าน ฉะนั้น $b = c$

และเนื่องจากเส้นแบ่งครึ่งมุมตั้งฉากกับฐาน จะได้ว่า $\widehat{DAB} + \widehat{ABD} = \theta + \beta = \frac{\pi}{2}$

$$\text{และ } \widehat{DAB} = \theta = \frac{\pi}{6}$$

ฉะนั้น

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{bc \sin 2\theta \sin(\theta + \beta)}{(b + c)(\sin(\theta + \beta) + \sin \theta)} \\ &= \frac{b^2 \sin 2\left(\frac{\pi}{6}\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{(2b)\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)} \\ &= \frac{b\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1)}{2\left(1 + \frac{1}{2}\right)} \\ &= \frac{\frac{b\sqrt{3}}{2}}{2 + 1} \\ r_1 &= \frac{b\sqrt{3}}{6} \end{aligned}$$

■

บทที่ 4

ผลการดำเนินงาน

ในการจัดทำโครงงาน เรื่อง การหารัศมีของวงกลมแนบในรูปสามเหลี่ยมใด ๆ (The Inradius Formula for a General Triangle) คณะผู้จัดทำได้ดำเนินการวิเคราะห์ข้อมูลและจำลองภาพวงกลมแนบในรูปสามเหลี่ยม โดยแบ่งผลการดำเนินงานออกเป็น 3 ตอนตามวัตถุประสงค์ของโครงงาน ดังนี้

ตอนที่ 1 ผลการสำรวจและสร้างภาพจำลองพลวัตด้วยโปรแกรม GSP และ GeoGebra

ในการศึกษาขั้นต้น คณะผู้จัดทำได้ใช้โปรแกรม Geometer's Sketchpad (GSP) และ GeoGebra เป็นเครื่องมือในการสำรวจเชิงเรขาคณิต โดยการสร้างรูปสามเหลี่ยมใด ๆ ที่สามารถปรับเปลี่ยนขนาดของด้านและมุมได้อย่างอิสระ จากนั้นทำการสร้างรังสีแบ่งครึ่งมุมยอดเพื่อหาจุดศูนย์กลางอินเซนเตอร์ และสร้างวงกลมแนบใน O_1 รัศมี r_1 เมื่อดำเนินการสร้างวงกลมชุดถัดไป ($O_2, O_3, \dots, O_n$) เรียงซ้อนกันลู่เข้าหาจุดยอดอย่างไม่สิ้นสุดตามเงื่อนไขที่กำหนด จากการวัดค่าพิกัดและคำนวณผ่านระบบของโปรแกรม พบว่าอัตราส่วนของรัศมีของวงกลมสองวงที่อยู่ติดกัน มีลักษณะเป็นค่าคงตัวเสมอในทุก ๆ กรณี ซึ่งสอดคล้องกับพจน์อนุกรมเรขาคณิตอนันต์ที่ลู่เข้าสู่จุดยอด จนกระทั่งสามารถสร้างเป็นบทตั้งได้สำเร็จ ดังนี้

บทตั้ง 3.1 กำหนดให้ $\triangle ABC$ รูปสามเหลี่ยมหน้าใด ๆ ถ้า O_1 เป็นวงกลมแนบใน $\triangle ABC$ และ O_n เป็นวงกลมที่มีเส้นผ่านศูนย์กลางอยู่บนเส้นแบ่งครึ่งมุมของ $\widehat{BAC}$ สัมผัสกับด้านประกอบมุม $\widehat{BAC}$ และสัมผัสกับวงกลม O_{n+1} โดยที่ $\frac{r_2}{r_1} = \frac{r_3}{r_2} = \frac{r_4}{r_3} = \dots = \frac{r_{n+1}}{r_n}$ เมื่อ r_n คือ รัศมีของวงกลม O_n แล้ว $\frac{r_{n+1}}{r_n} = \frac{1 - \sin \theta}{1 + \sin \theta}$ เมื่อ θ คือ ครึ่งหนึ่งของมุมยอดของรูป $\triangle ABC$

ตอนที่ 2 ผลการพิสูจน์และสร้างทฤษฎีบททั่วไปสำหรับรูปสามเหลี่ยมใด ๆ

จากข้อค้นพบเชิงตัวเลขในตอนต้น 1 คณะผู้จัดทำได้นำมาดำเนินการพิสูจน์เชิงอย่างเป็นระบบด้วยหลักการทางพีชคณิตและตรีโกณมิติ โดยบูรณาการสมบัติของรูปสามเหลี่ยมคล้าย ฟังก์ชันตรีโกณมิติ และการหาผลรวมของอนุกรมเรขาคณิตอนันต์ จนกระทั่งสามารถสร้างเป็นทฤษฎีบททั่วไปได้สำเร็จ ดังนี้

ทฤษฎีบท 3.2 กำหนดให้ วงกลม O_1 เป็นวงกลมแนบใน $\triangle ABC$ ใด ๆ ที่มีมุมภายในตรงจุดยอด A มีขนาด 2θ และมีมุมภายในตรงจุดยอด B และ C มีขนาด β และ α ตามลำดับ โดยมีด้านตรงข้ามมุม A, B และ C ยาว a, b และ c ตามลำดับ ถ้า r_1 คือ รัศมีของวงกลม O_1

$$\text{แล้ว } r_1 = \frac{bc \sin 2\theta \sin(\theta + \beta)}{(b + c)(\sin(\theta + \beta) + \sin \theta)} \quad \text{หรือ } r_1 = \frac{bc \sin 2\theta \sin(\theta + \alpha)}{(b + c)(\sin(\theta + \alpha) + \sin \theta)}$$

ตอนที่ 3 ผลการขยายผลและลดรูปทฤษฎีบททั่วไปไปสู่บทแทรกในกรณีเฉพาะ

เพื่อทดสอบความสมเหตุสมผลและความเที่ยงตรงของทฤษฎีบททั่วไป 3.2 คณะผู้จัดทำได้ทำการขยายผลโดยการแทนค่าเงื่อนไขเฉพาะ เพื่อลดรูปสูตรคณิตศาสตร์ไปสู่รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว และสามเหลี่ยมด้านเท่า ซึ่งให้ผลลัพธ์ที่เป็นไปตามทฤษฎีเรขาคณิตดั้งเดิมและสอดคล้องกับโครงการเดิมในปี พ.ศ. 2567 ดังนี้

1. กรณีรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว (บทแทรก 3.3)

บทแทรก 3.3 สำหรับรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วใด ๆ ที่มีมุมภายในตรงจุดยอดมีขนาด 2θ และมีด้านประกอบมุมยอดแต่ละด้านยาว b หน่วย ถ้ารัศมีของวงกลมแนบในรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว คือ r_1

$$\text{แล้ว } r_1 = \frac{b \sin 2\theta}{2(1 + \sin \theta)}$$

2. กรณีรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า (บทแทรก 3.4)

บทแทรก 3.4 สำหรับรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า ๆ ถ้ารัศมีของวงกลมแนบในรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว คือ

$$r_1 \text{ แล้ว } r_1 = \frac{b\sqrt{3}}{6}$$

บทที่ 5

สรุป อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ

ในการจัดทำโครงการ เรื่อง การหารัศมีของวงกลมแนบในรูปสามเหลี่ยมใด ๆ (The Inradius Formula for a General Triangle) จากการศึกษา คณะผู้จัดทำได้ดำเนินการบรรลุตามวัตถุประสงค์ของโครงการทุกประการ โดยสามารถสรุปข้อค้นพบทางคณิตศาสตร์ได้ ดังนี้

5.1 สรุป

1. ผลการสำรวจการใช้โปรแกรม GSP และ GeoGebra ช่วยให้ค้นพบว่า เมื่อสร้างวงกลมแนบในซ้อนกันอย่างไม่สิ้นสุดเข้าสู่จุดยอดของรูปสามเหลี่ยมใด ๆ อัตราส่วนของรัศมีวงกลมสองวงที่อยู่ติดกัน จะมีค่าคงตัวเท่ากับ $\frac{r_{n+1}}{r_n} = \frac{1 - \sin \theta}{1 + \sin \theta}$ เสมอ เมื่อ r_n คือ รัศมีของวงกลม O_n และ θ คือ ครึ่งหนึ่งของมุมยอดของรูป $\triangle ABC$ ซึ่งพิสูจน์ได้ว่าระบบเรขาคณิตนี้มีคุณสมบัติการเข้าสู่เป็นอนุกรมเรขาคณิตอนันต์

2. คณะผู้จัดทำประสบความสำเร็จในการบูรณาการความรู้เรื่องสามเหลี่ยมคล้าย ฟังก์ชันตรีโกณมิติ และอนุกรมเรขาคณิตอนันต์ จนสามารถสร้างสูตรทั่วไปในการคำนวณหารัศมีวงกลมแนบในวงแรก (r_1) ของรูปสามเหลี่ยมใด ๆ ได้ในรูปของฟังก์ชันตรีโกณมิติ คือ

$$r_1 = \frac{bc \sin 2\theta \sin(\theta + \beta)}{(b+c)(\sin(\theta + \beta) + \sin \theta)} \quad \text{หรือ} \quad r_1 = \frac{bc \sin 2\theta \sin(\theta + \alpha)}{(b+c)(\sin(\theta + \alpha) + \sin \theta)}$$

3. เมื่อทำการลดรูปสูตรทั่วไปโดยแทนเงื่อนไขเฉพาะ พบว่าสามารถลดรูปไปสู่สูตรของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว $r_1 = \frac{b \sin 2\theta}{2(1 + \sin \theta)}$ ซึ่งสอดคล้องตรงกันกับโครงการเดิมในปี พ.ศ. 2567 อย่าง

สมบูรณ์ และลดรูปไปสู่กรณีรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าได้ค่าคงตัว $r_1 = \frac{b\sqrt{3}}{6}$

5.2 อภิปรายผล

จากข้อค้นพบในโครงการ คณะผู้จัดทำมีประเด็นสำคัญที่สามารถนำมาอภิปรายผลเชิงวิชาการได้ ดังนี้

1. การเชื่อมโยงไปสู่โครงการเดิมใน พ.ศ. 2567 ศึกษาเฉพาะรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วซึ่งมีสมบัติสมมาตร ทำให้มุมที่ฐานเท่ากัน ($\alpha = \beta$) ส่งผลให้การจัดรูปสมการทำได้ง่าย แต่ในโครงการปัจจุบัน คณะผู้จัดทำได้ขยายผลไปสู่รูปสามเหลี่ยมใด ๆ ที่มีความแปรผันของมุมและด้านอย่างอิสระ การที่เราสามารถจัดรูปสมการจนเกิดพจน์ตรีโกณมิติได้นั้น ถือเป็นการพิสูจน์ว่าแนวคิดเรื่องอนุกรมเรขาคณิต

อนันต์ลู่เข้าสามารถนำมาอธิบายระบบเรขาคณิตที่ไม่สมมาตรได้จริง และทำให้สูตรนี้มีความเป็นนัยยะทั่วไป (Generalize Formula) มากยิ่งขึ้น

2. เมื่อเปรียบเทียบกับสูตรดั้งเดิมที่ใช้กันแพร่หลายอย่าง $r = \frac{\Delta}{s}$ จะเห็นได้ว่าทฤษฎีบท

3.2 ที่ค้นพบใหม่นี้มีคุณลักษณะเด่นที่เป็น “ฟังก์ชันตรีโกณมิติ” ซึ่งช่วยให้เราคำนวณหาค่ารัศมีแนบในได้ทันทีเมื่อทราบข้อมูลด้านประกอบมุมยอดและมุมภายใน โดยไม่จำเป็นต้องเสียเวลาคำนวณหาพื้นที่ทั้งหมดของรูปสามเหลี่ยมหรือความยาวด้านครบทั้ง 3 ด้านก่อน เป็นอีกหนึ่งทางเลือกใหม่ที่มีประสิทธิภาพในการคำนวณทางคณิตศาสตร์

3. การบูรณาการโปรแกรม GSP และ GeoGebra ไม่เพียงแต่ช่วยในการสร้างภาพจำลอง แต่ระบบการวัดพิกัดและคำนวณ ยังทำหน้าที่เป็นเครื่องมือตรวจสอบความถูกต้องของทฤษฎีก่อนการพิสูจน์จริง ทำให้กระบวนการวิจัยในโครงการนี้มีความน่าเชื่อถือและเป็นวิทยาศาสตร์

5.3 ข้อเสนอแนะ

1. ควรมีการขยายผลการศึกษาจากรูปทรงบนระนาบ 2 มิติ ไปสู่รูปทรงเรขาคณิตในพิกัด 3 มิติ ที่มีความซับซ้อนขึ้น

2. อาจศึกษาความสัมพันธ์เมื่อเปลี่ยนเงื่อนไขจากการซ้อนกันลู่เข้าหาจุดยอด เป็นการสร้างวงกลมแนบในลู่เข้าหาด้านฐาน หรือกระจายออกไปในทิศทางอื่น ๆ ของรูปสามเหลี่ยม

บรรณานุกรม

- [1] กิตติคุณยุพิน พิพิธกุล, อุษณีย์ สิริวัฒน์. (2548). เรขาคณิต. กรุงเทพฯ ฯ : บริษัท ด้านสุข ธารการพิมพ์จำกัด.
- [2] ราชบัณฑิตยสถาน. (2559). พจนานุกรมศัพท์คณิตศาสตร์ ฉบับราชบัณฑิตยสภา (พิมพ์ ครั้งที่ 11). นนทบุรี : สหมิตรพริ้นติ้งแอนด์พับลิชชิ่ง.
- [3] พิมพ์เพ็ญ เวชชาชีวะ. (2560). การพิสูจน์ โครงการตำราวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ มุลนิธิ สอวน. กรุงเทพฯ ฯ : สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- [4] สถาบันการส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2562). หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 1 (พิมพ์ครั้งที่ 3). กรุงเทพฯ ฯ : สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์ มหาวิทยาลัย.
- [5] สถาบันการส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2562). หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ม.6 เล่ม 1 (พิมพ์ครั้งที่ 3). กรุงเทพฯ ฯ : สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์ มหาวิทยาลัย.
- [6] กัญญาพัชร ทรัพย์ประเทือง, พรพิมล พัฒน์ชู, และ มินทร์ธาดา ประจวบบุญ. (2567). การหารัศมีของวงกลมแนบในรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว. สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยในพระบรมราชูปถัมภ์. https://drive.google.com/file/d/1V9urHHWL8mAlrI7A61V9urHHWL8mAlrI7A6Qh_dwZ1RGTwWqLM/view

ภาคผนวก ก

หลักฐานการเผยแพร่ผลงานโครงการ

“การหารัศมีของวงกลมแนบในสามเหลี่ยมหน้าจั่ว”

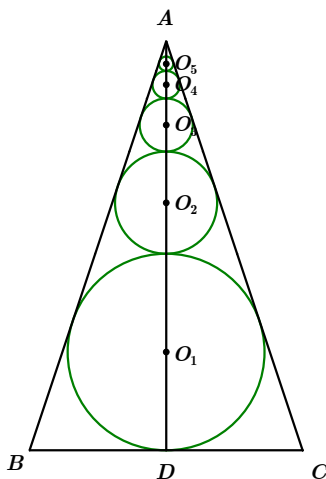
ชื่อโครงการ	การหารัศมีของวงกลมแนบในสามเหลี่ยมหน้าจั่ว (Radius of Incircle in Isosceles Triangle)
ชื่อผู้จัดทำ	1) นางสาวกัญญาพัชร ทรัพย์ประเทือง 2) นางสาวพรพิมล พัฒน์ชู 3) นางสาวมินทร์ธาดา ประจวบบุญ
ชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา	1) นายศิริวัฒน์ เอียวประดิษฐ์ 2) นายศุภชัย เรืองเดช 3) นางสาวจิราวรรณ ติวเส้ง

บทคัดย่อ

โครงการคณิตศาสตร์ เรื่อง การหารัศมีของวงกลมแนบในสามเหลี่ยมหน้าจั่ว (Radius of Incircle in Isosceles Triangle) มีวัตถุประสงค์เพื่อสร้างสูตรในการหารัศมีของวงกลมแนบในรูปสามเหลี่ยมในพจน์ของความยาวด้านของด้านประกอบมุมยอด และขนาดของมุมยอด ซึ่งใช้ความรู้เรื่อง สามเหลี่ยมคล้าย อัตราส่วนตรีโกณมิติ และอนุกรมเรขาคณิตอนันต์ ซึ่งผลการดำเนินโครงการปรากฏว่าสามารถหาสูตรในการหารัศมีของวงกลมแนบในรูปสามเหลี่ยมได้ ดังนี้

ทฤษฎีบท กำหนดให้รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว จะได้ว่า $r = \frac{a \sin 2\theta}{2(1 + \sin \theta)}$ โดยที่ r คือ รัศมีของ

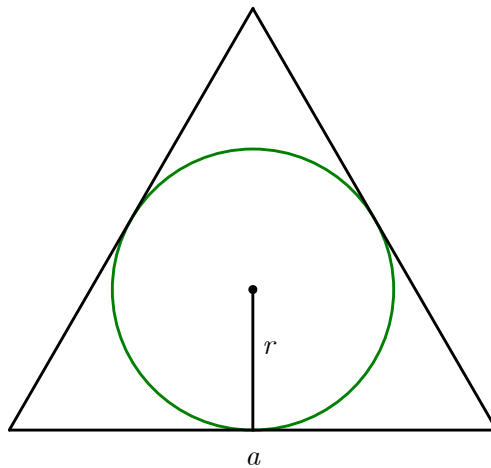
วงกลมแนบในรูปสามเหลี่ยม a คือ ความยาวด้านประกอบมุมยอดของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว และมุมยอดของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วมีขนาด 2θ



และจากสามเหลี่ยมด้านเท่าเป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่วชนิดหนึ่งที่มีขนาดมุมยอดเป็น 60°

เพราะฉะนั้น $\theta = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$ จึงสามารถสรุปได้เป็นบทแทรก ดังนี้

บทแทรก รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า จะได้ว่า $r = \frac{\sqrt{3}}{6}a$ โดยที่ r คือ รัศมีของวงกลมแนบในรูปสามเหลี่ยม a คือ ความยาวด้านประกอบมุมยอดของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า



สภามหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี

หน้าหลัก | เกี่ยวกับสถาบัน | กิจกรรมสถาบัน | อื่นๆ | วารสารคณิตศาสตร์ | สภามหาวิทยาลัย | ติดต่อสถาบัน

โครงการทั้งหมด

ผู้จัดทำ

- นางสาวกัญญาพร ทรัพย์ประเสริฐ
- นางสาวพรพิมล คัมภีร์
- นางสาวณัฏฐา ประจวบสุข

อาจารย์ปรึกษา
นายพิพัฒน์ เจริญจิตร
นายสุชาติ เรืองแสง

มคอ.ศึกษาฉบับที่ 2567

การหาพื้นที่ของวงกลมแนบในรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

ชื่อนายช่อเอ็ด

ผู้จัดทำ: กัญญาพร ทรัพย์ประเสริฐ, พรพิมล คัมภีร์, ณัฏฐา ประจวบสุข

ที่ปรึกษา: อ.ศิริวัฒน์ เจริญจิตร, อ.สุชาติ เรืองแสง, อ.จิราวรรณ คัมภีร์

สงสัยในหัวข้อหรือมีข้อสงสัยเกี่ยวกับงานเขียนหน้าจั่วจะคำนวณได้อย่างไร? โครงการนี้และเอกสารที่เชื่อมโยงกันจะช่วยให้คุณสามารถคำนวณพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมแนบในสามเหลี่ยมด้านเท่าได้อย่างง่ายดาย

เราคิด | สไลด์ | ดูงานเราคิดออนไลน์ | สานต่อหน้าจั่ว

📄 เสร็จโครงการ | 📄 เก็บไว้ดู

ผู้จัดทำ

นางสาวกัญญาพร ทรัพย์ประเสริฐ, นางสาวพรพิมล คัมภีร์, นางสาวณัฏฐา ประจวบสุข

มคอ.ศึกษาฉบับที่ 2567

การศึกษาปริมาตรของโมเดลสามมิติในแบบของงานหลัก

ด้านสองด้าน

แสดงรายละเอียด

เคยสงสัยไหมว่า 3D Modeling เป็นอะไร? ที่เห็นในโซเชียลมีเดีย? โครงการนี้เป็นการนำเสนอผลงานของนักศึกษาชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เรื่องการสร้างโมเดล 3 มิติ "อาคารสองด้าน" ที่สวยงามและใช้งานได้จริง และยังสามารถนำมาประยุกต์ใช้ในงานอื่นๆ ได้อีกด้วย

เราคิด | สไลด์ | การสร้างโมเดล 3 มิติ | 3D Printing | คอมพิวเตอร์

📄 เสร็จโครงการ | 📄 เก็บไว้ดู

ผู้จัดทำ

- นางสาวกัญญาพร ทรัพย์ประเสริฐ
- นางสาวพรพิมล คัมภีร์
- นางสาวณัฏฐา ประจวบสุข

นักเรียน
ณัฏฐา เจริญจิตร

มคอ.ศึกษาฉบับที่ 2567

เงื่อนไขของจำนวนเต็มบวกซึ่งหารด้วย 13 ลงตัว

แสดงรายละเอียด

เคยสงสัยไหมว่า เลขจำนวนเต็มบวกซึ่งหารด้วย 13 ลงตัวได้อย่างไร? โครงการนี้จะพาคุณไปพบกับ เงื่อนไขของจำนวนเต็มบวก ซึ่งจะเป็นประโยชน์อย่างมากในการแก้โจทย์ปัญหาได้อย่างรวดเร็ว

เราคิด | สไลด์ | การหารลงตัว | คอมพิวเตอร์ | การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

📄 เสร็จโครงการ | 📄 เก็บไว้ดู

สืบค้นได้จาก

https://drive.google.com/file/d/1V9urHHWL8mArlr7A6Oh_dwZ1RGTvWqLM/view



หรือสแกน QR CODE ได้ที่

ภาคผนวก ข

ผลการสำรวจผ่านโปรแกรม GSP 5 (The Geometer's Sketchpad 5)
และโปรแกรม GeoGebra

