



โครงการคณิตศาสตร์

เรื่อง ถอดรหัสรากที่ n ➡️ สู่รูปหลายเหลี่ยมบนระนาบเชิงซ้อน

ปีพุทธศักราช 2569

โรงเรียนครนพิทยาคม
KRONPITTAYAKOM SCHOOL

ผู้จัดทำโครงการ

- | | |
|-----------------|----------|
| 1 นางสาวชญาณิตย | พุททอง |
| 2 นางสาวชญานุช | พุททอง |
| 3 นางสาววินวิสา | วรรณศิริ |

ครูที่ปรึกษาโครงการ
นางสาววิลยา โพธิ์เอื้อง
นางอุรตน์ พึ่งพงษ์

โครงการคณิตศาสตร์ประเภท ทฤษฎี ระดับมัธยมศึกษาตอนปลายโรงเรียนครนพิทยาคม อำเภอศรี จังหวัดชุมพร
ปีพุทธศักราช 2569

โครงการคณิตศาสตร์ เรื่อง ถอดรหัสรากที่ n จากรูปหลายเหลี่ยมบนระนาบเชิงซ้อน

ผู้จัดทำโครงการ	1.นางสาวชญาณัฐ พุ่มทอง
	2.นางสาวชญานิตย์ พุ่มทอง
	3. นางสาววันวิสา วรรณศิริ
ครูที่ปรึกษาโครงการ	1.นางสาววัลยา โพธิ์เอื้อง
	2.นางอรุณรัตน์ พึ่งพงษ์
สถานศึกษา	โรงเรียนครนพิทยาคม อำเภอเสวี จังหวัดชุมพร
ปีการศึกษา	2569

บทคัดย่อ

เนื้อหาคณิตศาสตร์เรื่องจำนวนเชิงซ้อน ซึ่งเป็นส่วนหนึ่งของพีชคณิต ถือเป็นเรื่องที่มีความซับซ้อนและยากต่อการทำความเข้าใจสำหรับนักเรียน เนื่องจากเพื่อนร่วมชั้นส่วนใหญ่ยังขาดความเข้าใจเกี่ยวกับการหารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน และการประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทของเดอมัวร์ ทำให้ไม่สามารถวิเคราะห์และแก้โจทย์ปัญหาได้อย่างถูกต้อง ผู้จัดทำจึงตระหนักถึงปัญหานี้และร่วมกันศึกษาเพื่อหาแนวทางในการทำความเข้าใจเนื้อหาได้ดียิ่งขึ้น

โครงการเรื่องนี้มีจุดประสงค์เพื่อช่วยแก้ปัญหาการขาดความเข้าใจเกี่ยวกับการหารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน โดยประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทของเดอมัวร์ และศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างรากที่ n กับรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่าบนระนาบเชิงซ้อน

วิธีการดำเนินงาน กลุ่มของข้าพเจ้าได้ร่วมกันวิเคราะห์ปัญหาและกำหนดหัวข้อที่จะศึกษา จากนั้นศึกษาค้นคว้าเนื้อหาคณิตศาสตร์เรื่องจำนวนเชิงซ้อน รูปเชิงขั้ว และทฤษฎีบทของเดอมัวร์ แล้วนำความรู้ที่ได้มาประยุกต์ใช้ในการหารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน ศึกษารูปแบบการกระจายตัวของรากบนระนาบเชิงซ้อน และวิเคราะห์ความสัมพันธ์กับรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่า จากนั้นตรวจสอบความถูกต้องของผลการคำนวณ ปรับปรุงแก้ไข และสรุปผลการดำเนินงานจัดเป็นโครงการ

ผลการดำเนินงานโครงการ พบว่าสามารถหารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อนได้โดยประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทของเดอมัวร์และพบว่ารากที่ได้มีการกระจายตัวอย่างสม่ำเสมอบนเส้นรอบวงหนึ่งหน่วยโดยมีตำแหน่งสัมพันธ์กับจุดยอดของรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่าทำให้เห็นรูปแบบและความสัมพันธ์ระหว่างพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อนกับเรขาคณิตบนระนาบเชิงซ้อนได้อย่างชัดเจน

จุดเด่นของโครงการ คือ ผู้จัดทำสามารถนำความรู้เรื่องจำนวนเชิงซ้อนและทฤษฎีบทของเดอมัวร์มาประยุกต์ใช้ในการค้นหารูปแบบของรากที่ n ได้อย่างเป็นระบบ อีกทั้งยังเชื่อมโยงความรู้ทางพีชคณิตกับเรขาคณิตโดย

แสดงความสัมพันธ์ของรากที่ n กับรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่าบนระนาบเชิงซ้อน ทำให้เห็นและเข้าใจเนื้อหาที่มีความซับซ้อนได้ชัดเจนยิ่งขึ้น

ปัญหาและอุปสรรคการจัดทำโครงการในครั้งนี้ คือ เนื้อหาเกี่ยวกับจำนวนเชิงซ้อนและทฤษฎีบทของเดอมัวร์ มีความซับซ้อน ทำให้ในช่วงแรกกลุ่มผู้จัดทำยังไม่เข้าใจเนื้อหาและวิธีการคำนวณอย่างชัดเจน นอกจากนี้ การคำนวณรากที่ n และการตรวจสอบความถูกต้องของคำตอบในบางกรณีต้องใช้เวลาและความละเอียดรอบคอบ จึงต้องช่วยกันศึกษาค้นคว้าและตรวจสอบข้อมูลหลายครั้ง

ข้อเสนอแนะ สามารถพัฒนาโครงการโดยศึกษาการหารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อนในกรณีที่มีค่า n ที่หลากหลายมากขึ้น รวมทั้งศึกษาและเปรียบเทียบรูปแบบของรากในกรณีต่างๆ นอกจากนี้ อาจนำโปรแกรมคอมพิวเตอร์มาช่วยในการคำนวณและสร้างภาพบนระนาบเชิงซ้อน เพื่อให้เห็นรูปแบบของรากและความสัมพันธ์กับรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่าได้ชัดเจนและเข้าใจง่ายขึ้น

กิตติกรรมประกาศ

การจัดทำโครงการคณิตศาสตร์ เรื่อง ถอดรหัสรากที่ n สู่รูปหลายเหลี่ยมบนระนาบเชิงซ้อน สำเร็จลงได้ด้วย ความอนุเคราะห์ สนับสนุน และเสนอแนะจากบุคลากรหลายฝ่ายดังนี้

ขอขอบคุณ นายโชคชัย สุขแก้ว ผู้อำนวยการสถานศึกษา นางลักขณา พรหมพัชร รองผู้อำนวยการ สถานศึกษา หัวหน้ากลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ คณะครูและบุคลากรทางการศึกษาของโรงเรียนครนพิทยาคม ทุกท่าน

ขอขอบคุณ นางสาววัลยา โพธิ์เอื้อง และนางอุรรัตน์ พึ่งพงษ์ ครูที่ปรึกษาโครงการ ที่ให้คำแนะนำ ความช่วยเหลือในการจัดทำโครงการเป็นอย่างดี ที่ช่วยส่งเสริมและสนับสนุนให้มีการจัดกิจกรรมโครงการ จนกระทั่งการทำโครงการครั้งนี้ประสบความสำเร็จลุล่วงไปด้วยดี

ขอขอบคุณครอบครัว น้อง เพื่อน และพี่ โรงเรียนครนพิทยาคม ที่สนับสนุนและเป็นกำลังใจตลอดการทำโครงการในครั้งนี้

คณะผู้จัดทำขอขอบพระคุณบุคคลที่กล่าวมาข้างต้นเป็นอย่างสูงไว้ ณ โอกาสนี้

คณะผู้จัดทำโครงการ

สารบัญ

ชื่อเรื่อง	หน้า
บทคัดย่อ	ก
กิตติกรรมประกาศ	ค
สารบัญ	ง
สารบัญรูปภาพ	จ
เนื้อเรื่องโครงงาน	
2.1 ความเป็นมา และ ความสำคัญ	1
2.2 จุดประสงค์ของโครงงาน	1
2.3 ขอบเขตของโครงงาน	1
2.4 สมมติฐานของการทำโครงงาน	1
2.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ	2
2.6 เนื้อหาคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง	2
2.7 วิธีการดำเนินงาน	4
2.8 ผลการดำเนินงาน	6
2.9 สรุปและอภิปรายผล	14
2.10 ปัญหาและอุปสรรค	14
2.11 ข้อเสนอแนะ	14
บรรณานุกรม	15
ภาคผนวก	16

สารบัญรูปภาพ

ภาพ	หน้า
ภาพที่ 1 การวางแผนการดำเนินโครงการ	5
ภาพที่ 2 การศึกษาและรวบรวมข้อมูล	5
ภาพที่ 3 การดำเนินงานตามที่วางแผนไว้	5
ภาพที่ 4 สิ้นสุดการดำเนินงาน พร้อมตรวจสอบความถูกต้อง	5
ภาพที่ 5 การหารากที่ 1 ของ 1	9
ภาพที่ 6 การหารากที่ 2 ของ 1	9
ภาพที่ 7 การหารากที่ 3 ของ 1	10
ภาพที่ 8 การหารากที่ 4 ของ 1	10
ภาพที่ 9 การหารากที่ 5 ของ 1	11
ภาพที่ 10 การหารากที่ 6 ของ 1	11
ภาพที่ 11 การหารากที่ 7 ของ 1	12
ภาพที่ 12 การหารากที่ 8 ของ 1	12
ภาพที่ 13 การหารากที่ 9 ของ 1	13
ภาพที่ 14 การหารากที่ 10 ของ 1	13

บทที่ 2 เนื้อเรื่องโครงการ

2.1 ความเป็นมา และ ความสำคัญ

คณิตศาสตร์เรื่อง จำนวนเชิงซ้อนเป็นเนื้อหาสำคัญในด้านพีชคณิตโดยเฉพาะเรื่องการหารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน ซึ่งสามารถนำไปใช้ในการแก้โจทย์ทางคณิตศาสตร์ได้แต่เนื้อหานี้มีหลายขั้นตอนและค่อนข้างซับซ้อน จึงอาจทำให้นักเรียนบางส่วนเข้าใจได้ยากทฤษฎีบทของเดอมัวร์เป็นวิธีหนึ่งที่จะช่วยในการคำนวณจำนวนเชิงซ้อนและการหารากที่ n ได้ เมื่อคำนวณหารากแล้วสามารถนำคำตอบมาแสดงบนระนาบเชิงซ้อนได้ ทำให้เห็นตำแหน่งของรากและรูปแบบการกระจายตัวของรากได้ชัดเจนรวมถึงเห็นความสัมพันธ์กับรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่าจากการเรียนเนื้อหาเรื่องจำนวนเชิงซ้อน พบว่าเพื่อนร่วมชั้นหลายคนยังมีปัญหาในการคำนวณเรื่องนี้ คณะผู้จัดทำจึงสนใจศึกษาเรื่องดังกล่าว เพื่อช่วยให้เข้าใจวิธีการหารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อนได้ง่ายขึ้น และมองเห็นความสัมพันธ์ระหว่างพีชคณิตกับเรขาคณิตได้ชัดเจนยิ่งขึ้น

2.2 จุดประสงค์ของโครงการ

2.2.1) เพื่อศึกษาหารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อนโดยใช้ทฤษฎีบทของเดอมัวร์

2.2.2) เพื่อศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างรากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อนกับรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่าบนระนาบเชิงซ้อน

2.3 ขอบเขตของโครงการ

ศึกษารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน โดยใช้ทฤษฎีบทของเดอมัวร์ และศึกษารูปแบบการกระจายตัวของรากบนระนาบเชิงซ้อน รวมถึงความสัมพันธ์กับรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่า โดยกำหนดค่า n ตั้งแต่ 1 – 10

2.4 สมมุติฐานของการทำโครงการ

2.4.1) การใช้ทฤษฎีบทของเดอมัวร์จะช่วยให้สามารถหารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อนได้อย่างเป็นระบบ

2.4.2) รากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อนจะมีการกระจายตัวอย่างสม่ำเสมอ และมีความสัมพันธ์กับจุดยอดของรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่า

2.4.3) ระยะเวลาทำโครงการ

- วันที่ 1 กรกฎาคม พ.ศ. 2569 ถึงวันที่ 1 สิงหาคม พ.ศ. 2569

2.4.4) สถานที่ทำโครงการ

- โรงเรียนครนพิทยาคม อำเภอศรี จังหวัดชุมพร

2.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

2.5.1) เข้าใจวิธีการหารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อนโดยใช้ทฤษฎีบทของเดอมัวร์มากขึ้น

2.5.2) เข้าใจรูปแบบการกระจายตัวของรากบนระนาบเชิงซ้อน

2.5.3) เห็นความสัมพันธ์ระหว่างพีชคณิตกับเรขาคณิตได้ชัดเจนขึ้น

2.5.4) สามารถนำความรู้ที่ได้ไปใช้ในการเรียนและแก้โจทย์เกี่ยวกับจำนวนเชิงซ้อนได้

2.6 เนื้อหาทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง

ในการจัดทำโครงการเรื่องนี้ ผู้จัดทำโครงการได้ศึกษาค้นคว้าเนื้อหาทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง ซึ่งจะประกอบไปด้วย จำนวนเชิงซ้อน รูปเชิงขั้วของจำนวนเชิงซ้อน ทฤษฎีบทของเดอมัวร์ การหารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน วงกลม 1 หน่วย บนระนาบเชิงซ้อน และรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่า

2.6.1 จำนวนเชิงซ้อน

จำนวนเชิงซ้อน คือ จำนวนที่เขียนในรูป $z = a + bi$ โดย a เป็นส่วนจริง b เป็นส่วนจินตภาพ และ $i^2 = -1$ จำนวนเชิงซ้อนสามารถนำไปเขียนในรูปเชิงขั้วและนำไปใช้ในการหารากที่ n โดยใช้ทฤษฎีบทของเดอมัวร์ จึงเป็นพื้นฐานสำคัญของงานนี้

2.6.2 รูปเชิงขั้ว

รูปเชิงขั้ว คือ การเขียนจำนวนเชิงซ้อนโดยใช้ขนาดและมุมแทนส่วนจริง และส่วนจินตภาพ มีรูปแบบ

$z = r (\cos \theta + i \sin \theta)$ โดย $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ และ $\tan \theta = \frac{b}{a}$ รูปเชิงขั้วมีความสัมพันธ์กับทฤษฎีบทเดอมัวร์ เนื่องจากเป็นรูปที่ใช้ในการคำนวณการยกกำลังและการหารากของจำนวนเชิงซ้อน

2.6.3 ทฤษฎีบทของเดอมัวร์

ทฤษฎีบทของเดอมัวร์ เป็นทฤษฎีที่ใช้คำนวณจำนวนเชิงซ้อน ในรูปเชิงขั้ว โดยมีสูตร

$$[r(\cos \theta + i \sin \theta)]^n = r^n [\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)]$$

และสามารถนำมาใช้หารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อนได้ จึงเป็นหลักสำคัญที่นำมาใช้ในการดำเนินโครงการ

2.6.4 รากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน

รากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน คือ จำนวนเชิงซ้อนที่เมื่อนำไปยกกำลัง n แล้ว ได้จำนวนเชิงซ้อนที่กำหนด โดยสามารถหาได้จากสูตร

$$w_k = \sqrt[n]{r} \left[\cos \left(\frac{\theta + 360^\circ k}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\theta + 360^\circ k}{n} \right) \right]$$

เมื่อ $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ ทำให้ได้รากทั้งหมด n ค่า และแต่ละรากมีมุมห่างกันเท่ากับ $\frac{360^\circ}{n}$ ซึ่งเป็นความสัมพันธ์สำคัญกับการกระจายตัวของรากบนวงกลมหนึ่งหน่วย

2.6.5 วงกลมหนึ่งหน่วยและระนาบเชิงซ้อน

วงกลมหนึ่งหน่วย คือ วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิดและรัศมีเท่ากับ 1 มีสมการ $x^2 + y^2 = 1$ เมื่อนำรากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อนที่มีขนาดเท่ากับ 1 มาแสดงบนระนาบเชิงซ้อน รากแต่ละค่าจะอยู่บนเส้นรอบวงและการกระจายตัวอย่างสม่ำเสมอ

2.6.6 รูปหลายเหลี่ยมด้านเท่า

รูปหลายเหลี่ยมด้านเท่า คือ รูปที่มีด้านทุกด้านยาวเท่ากัน เมื่อนำจุดของรากที่ n ซึ่งอยู่บนวงกลมหนึ่งหน่วยมาเชื่อมต่อกัน จะเกิดเป็นรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่าที่มีจำนวนด้านเท่า เท่ากับจำนวนราก เช่น รากที่ 3 จะได้รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า และรากที่ 4 จะได้รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ดังนั้นจึงเห็นความสัมพันธ์ตั้งแต่การหารากที่ n ด้วยทฤษฎีบทเดอมัวร์ ไปจนถึงการเกิดรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่าบนระนาบเชิงซ้อน

2.7 วิธีการดำเนินงาน

โครงการของเราสนใจและตั้งใจศึกษาเกี่ยวกับ การหารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อนโดยใช้ทฤษฎีเดอมัวร์ โดยมีขั้นตอนการดำเนินงาน ดังนี้

2.7.1 ศึกษาเอกสารและข้อมูลที่เกี่ยวข้อง

ศึกษาความรู้เกี่ยวกับจำนวนเชิงซ้อน รูปเชิงขั้ว และทฤษฎีบทของเดอมัวร์

2.7.2 ศึกษาการหารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน

ศึกษาสูตรและวิธีการหารากที่ 1 – 10 เพื่อใช้ในการศึกษาและเปรียบเทียบผล

2.7.3 กำหนดตัวอย่างในการศึกษา

เลือกตัวอย่างการหารากที่ 1 – 10 เพื่อใช้ในการศึกษาและเปรียบเทียบผล

2.7.4 ดำเนินการคำนวณ

คำนวณหารากของจำนวนเชิงซ้อนในแต่ละกรณีตามขั้นตอนของทฤษฎีบทของเดอมัวร์

2.7.5 จัดทำแผนภาพ

นำผลการคำนวณมาแสดงบนระนาบเชิงซ้อน โดยใช้วงกลมเพื่อแสดงตำแหน่งของรากในแต่ละค่า

ค่า

2.7.6 วิเคราะห์ผล

วิเคราะห์ลักษณะการกระจายตัวของราก จำนวนราก และความสัมพันธ์ กับรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่า

เท่า

2.7.7 สรุปผลการศึกษา

สรุปผลที่ได้จากการศึกษาและจัดทำรายงานโครงการ

รูปภาพขั้นตอนการดำเนินงาน



ภาพที่ 1

คณะผู้จัดทำได้ประชุมวางแผนการดำเนินโครงการ
กำหนดวัตถุประสงค์ แบ่งหน้าที่รับผิดชอบของสมาชิก
สำหรับการดำเนินโครงการในวันถัดไป



ภาพที่ 2

คณะผู้จัดทำได้ศึกษาค้นคว้าข้อมูลจากเอกสารและ
แหล่งข้อมูลที่เกี่ยวข้อง พร้อมทั้งรวบรวมข้อมูลที่จำเป็น
เพื่อนำมาใช้ในการดำเนินโครงการ



ภาพที่ 3

คณะผู้จัดทำได้ดำเนินงานตามแผนที่กำหนด พร้อม
ตรวจสอบความถูกต้องของผลงาน และเตรียมความ
พร้อมสำหรับการนำเสนอผลการดำเนินงาน



ภาพที่ 4

คณะผู้จัดทำได้ดำเนินโครงการเสร็จสิ้น พร้อมตรวจสอบ
ความถูกต้องของผลงาน และเตรียมความพร้อมสำหรับ
การนำเสนอผลงาน

2.8 ผลการดำเนินงาน

จากการศึกษาหารากที่ 1 – 10 ของจำนวนเชิงซ้อนโดยใช้ทฤษฎีบทของเดอมัวร์ คณะผู้จัดทำได้ดำเนินการศึกษาสูตรการหารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน ตัวอย่างการคำนวณและแสดงผลลัพธ์บนระนาบเชิงซ้อน โดยจะแสดงเป็นรูปภาพ พร้อมคำอธิบายและการวิเคราะห์ผล ดังต่อไปนี้

2.8.1 ศึกษาสูตรการหารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน

คณะผู้จัดทำได้ศึกษาสูตรการหารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อนโดยใช้ทฤษฎีบทของเดอมัวร์ เพื่อทำความเข้าใจหลักการคำนวณและนำไปใช้ในการหาคำตอบของจำนวนเชิงซ้อน ดังนั้น สูตรที่ใช้ คือ

$$w_k = \sqrt[n]{r} \left[\cos \left(\frac{\theta + 360^\circ k}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\theta + 360^\circ k}{n} \right) \right], k = 0, 1, \dots, n-1$$

สูตรดังกล่าว ใช้ในการหารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อนโดยค่าของ k จะเปลี่ยนตั้งแต่ 0 ถึง $n-1$ เพื่อให้ได้รากทั้งหมดของจำนวนเชิงซ้อน

2.8.2 ตัวอย่างการคำนวณ

หารากที่ 10 ของ 1 โดยใช้ทฤษฎีบทของเดอมัวร์

$$Z = 1 + 0i$$

$$\text{หา } r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r = \sqrt{1^2 + 0^2}$$

$$r = \sqrt{1}$$

$$r = 1$$

$$\text{หา } \theta = \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\theta = 0^\circ$$

$$Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$Z = 1(\cos 0^\circ + i\sin 0^\circ)$$

$$Z = 1(1 + 0i)$$

$$Z = 1$$

ใช้สูตรเดอมัวร์

$$\text{จาก } z_k = \sqrt[n]{r} \left[\cos \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \right]$$

$$\begin{aligned}
 k=0 \\
 Z_0 &= \sqrt[10]{1} \left[\cos \left(\frac{0+2(0)\pi}{10} \right) + i \sin \left(\frac{0+2(0)\pi}{10} \right) \right] \\
 &= \sqrt[10]{1} \left[\cos \left(\frac{0\pi}{10} \right) + i \sin \left(\frac{0\pi}{10} \right) \right] \\
 &= \sqrt[10]{1} [\cos 0 + i \sin 0] \\
 &= \sqrt[10]{1} (\cos(0) + i \sin(0)) \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k=1 \\
 Z_1 &= \sqrt[10]{1} \left[\cos \left(\frac{0+2(1)\pi}{10} \right) + i \sin \left(\frac{0+2(1)\pi}{10} \right) \right] \\
 &= \sqrt[10]{1} \left[\cos \left(\frac{2\pi}{10} \right) + i \sin \left(\frac{2\pi}{10} \right) \right] \\
 &= \sqrt[10]{1} \left[\cos \left(\frac{\pi}{5} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{5} \right) \right] \\
 &= \sqrt[10]{1} (\cos(\frac{\pi}{5}) + i \sin(\frac{\pi}{5})) \\
 &= \cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k=4 \\
 Z_4 &= \sqrt[10]{1} \left[\cos \left(\frac{0+2(4)\pi}{10} \right) + i \sin \left(\frac{0+2(4)\pi}{10} \right) \right] \\
 &= \sqrt[10]{1} \left[\cos \left(\frac{8\pi}{10} \right) + i \sin \left(\frac{8\pi}{10} \right) \right] \\
 &= \sqrt[10]{1} (\cos(\frac{8\pi}{10}) + i \sin(\frac{8\pi}{10})) \\
 &= \cos \frac{4\pi}{5} + i \sin \frac{4\pi}{5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k=5 \\
 Z_5 &= \sqrt[10]{1} \left[\cos \left(\frac{0+2(5)\pi}{10} \right) + i \sin \left(\frac{0+2(5)\pi}{10} \right) \right] \\
 &= \sqrt[10]{1} \left[\cos \left(\frac{10\pi}{10} \right) + i \sin \left(\frac{10\pi}{10} \right) \right] \\
 &= \sqrt[10]{1} [\cos(\pi) + i \sin(\pi)] \\
 &= \sqrt[10]{1} (\cos \pi + i \sin \pi) \\
 &= \cos \pi + i \sin \pi
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k=2 \\
 Z_2 &= \sqrt[10]{1} \left[\cos \left(\frac{0+2(2)\pi}{10} \right) + i \sin \left(\frac{0+2(2)\pi}{10} \right) \right] \\
 &= \sqrt[10]{1} \left[\cos \left(\frac{4\pi}{10} \right) + i \sin \left(\frac{4\pi}{10} \right) \right] \\
 &= \sqrt[10]{1} (\cos(\frac{4\pi}{10}) + i \sin(\frac{4\pi}{10})) \\
 &= \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k=3 \\
 Z_3 &= \sqrt[10]{1} \left[\cos \left(\frac{0+2(3)\pi}{10} \right) + i \sin \left(\frac{0+2(3)\pi}{10} \right) \right] \\
 Z_3 &= \sqrt[10]{1} \left[\cos \left(\frac{6\pi}{10} \right) + i \sin \left(\frac{6\pi}{10} \right) \right] \\
 Z_3 &= \sqrt[10]{1} (\cos(\frac{6\pi}{10}) + i \sin(\frac{6\pi}{10})) \\
 &= \cos \frac{3\pi}{5} + i \sin \frac{3\pi}{5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k=6 \\
 Z_6 &= \sqrt[10]{1} \left[\cos \left(\frac{0+2(6)\pi}{10} \right) + i \sin \left(\frac{0+2(6)\pi}{10} \right) \right] \\
 &= \sqrt[10]{1} \left[\cos \left(\frac{12\pi}{10} \right) + i \sin \left(\frac{12\pi}{10} \right) \right] \\
 &= \sqrt[10]{1} (\cos(\frac{12\pi}{10}) + i \sin(\frac{12\pi}{10})) \\
 &= \cos \frac{6\pi}{5} + i \sin \frac{6\pi}{5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k=7 \\
 Z_7 &= \sqrt[10]{1} \left[\cos \left(\frac{0+2(7)\pi}{10} \right) + i \sin \left(\frac{0+2(7)\pi}{10} \right) \right] \\
 &= \sqrt[10]{1} \left[\cos \left(\frac{14\pi}{10} \right) + i \sin \left(\frac{14\pi}{10} \right) \right] \\
 &= \sqrt[10]{1} (\cos(\frac{14\pi}{10}) + i \sin(\frac{14\pi}{10})) \\
 &= \cos \frac{7\pi}{5} + i \sin \frac{7\pi}{5}
 \end{aligned}$$

$$k = 8$$

$$\begin{aligned} Z_8 &= \sqrt[10]{1} \left[\cos \left(\frac{0+2(8)\pi}{10} \right) + i \sin \left(\frac{0+2(8)\pi}{10} \right) \right] \\ &= \sqrt[10]{1} \left[\cos \left(\frac{16\pi}{10} \right) + i \sin \left(\frac{16\pi}{10} \right) \right] \\ &= \sqrt[10]{1} \left(\cos \left(\frac{16\pi}{10} \right) + i \sin \left(\frac{16\pi}{10} \right) \right) \\ &= \cos \frac{8\pi}{5} + i \sin \frac{8\pi}{5} \end{aligned}$$

$$k = 9$$

$$\begin{aligned} Z_9 &= \sqrt[10]{1} \left[\cos \left(\frac{0+2(9)\pi}{10} \right) + i \sin \left(\frac{0+2(9)\pi}{10} \right) \right] \\ &= \sqrt[10]{1} \left[\cos \left(\frac{18\pi}{10} \right) + i \sin \left(\frac{18\pi}{10} \right) \right] \\ &= \sqrt[10]{1} \left(\cos \left(\frac{18\pi}{10} \right) + i \sin \left(\frac{18\pi}{10} \right) \right) \\ &= \cos \frac{9\pi}{5} + i \sin \frac{9\pi}{5} \end{aligned}$$

$$\therefore Z_0 \quad k = 1$$

$$Z_1 \quad k = \cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5}$$

$$Z_2 \quad k = \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}$$

$$Z_3 \quad k = \cos \frac{3\pi}{5} + i \sin \frac{3\pi}{5}$$

$$Z_4 \quad k = \cos \frac{4\pi}{5} + i \sin \frac{4\pi}{5}$$

$$Z_5 \quad k = \cos \pi + i \sin \pi$$

$$Z_6 \quad k = \cos \frac{6\pi}{5} + i \sin \frac{6\pi}{5}$$

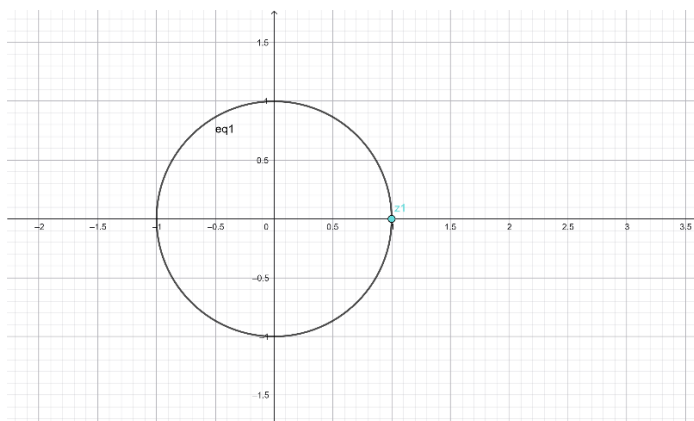
$$Z_7 \quad k = \cos \frac{7\pi}{5} + i \sin \frac{7\pi}{5}$$

$$Z_8 \quad k = \cos \frac{8\pi}{5} + i \sin \frac{8\pi}{5}$$

$$Z_9 \quad k = \cos \frac{9\pi}{5} + i \sin \frac{9\pi}{5}$$

2.8.3 การจัดการทำแผนภาพ และการอธิบาย วิเคราะห์ เกี่ยวกับการกระจายของรากบนวงกลม ได้รูปภาพ

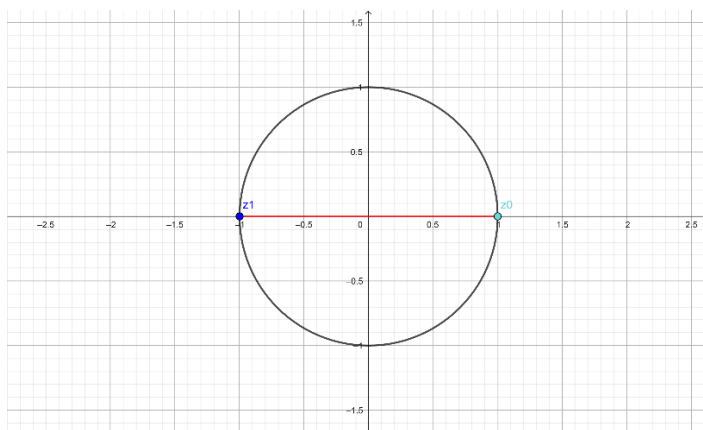
(รากที่ 1 ของ 1)



ภาพที่ 5 รูปหลายเหลี่ยมของ รากที่ 1 ของ 1

จากรูป พบว่ารากที่ 1 ของจำนวนเชิงซ้อนมี 1 ราก เรียงตัวอยู่บนวงกลมเป็นเส้นเดียว

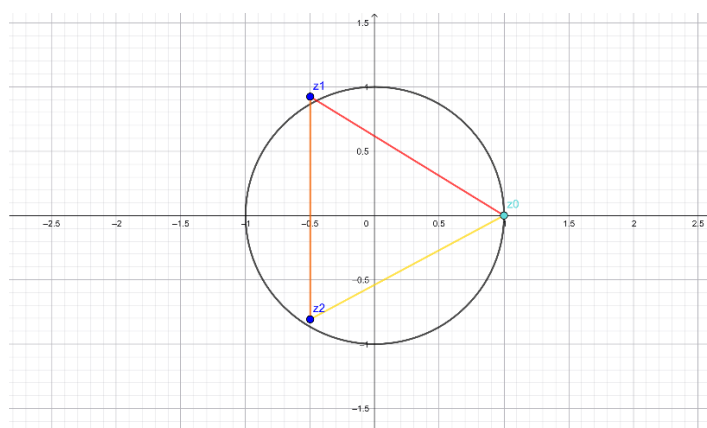
(รากที่ 2 ของ 1)



ภาพที่ 6 รูปหลายเหลี่ยมของ รากที่ 2 ของ 1

จากรูป พบว่ารากที่ 2 ของจำนวนเชิงซ้อนมี 2 ราก เรียงตัวอยู่ตรงข้ามกันบนวงกลม แสดงให้เห็นว่ารากมีระยะห่างกันเชิงมุมเท่ากันและกระจายตัวอย่างสมมาตร

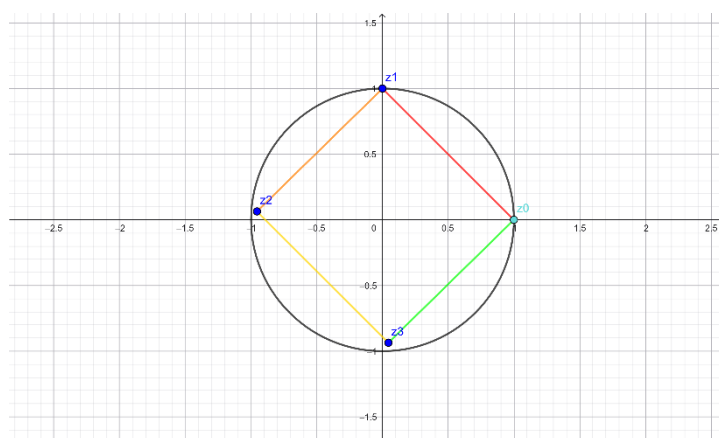
(รากที่ 3 ของ 1)



ภาพที่ 3 รูปหลายเหลี่ยมของ รากที่ 3 ของ 1

จากรูป พบว่ารากที่ 3 ของจำนวนเชิงซ้อนมี 3 ราก เรียงตัวเป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าบนวงกลม แสดงให้เห็นว่ารากกระจายตัวอย่างสม่ำเสมอและมีมุมห่างกันเท่ากัน

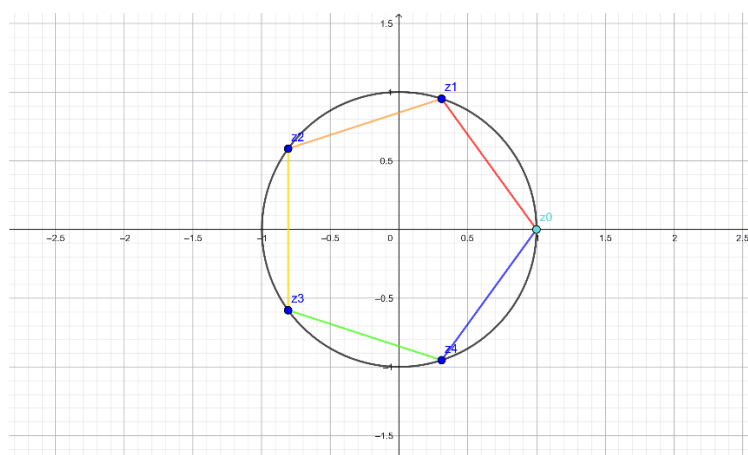
(รากที่ 4 ของ 1)



ภาพที่ 4 รูปหลายเหลี่ยมของ รากที่ 4 ของ 1

จากรูป รากที่ 4 ของจำนวนเชิงซ้อนมี 4 ราก เรียงตัวเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนวงกลม แสดงให้เห็นว่ารากแต่ละรากมีระยะห่างเชิงมุมเท่ากัน

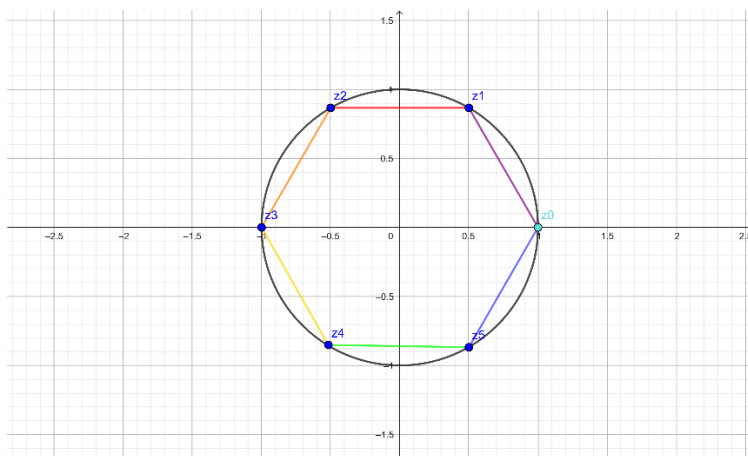
(รากที่ 5 ของ 1)



รูปที่ 5 รูปหลายเหลี่ยมของ รากที่ 5 ของ 1

จากรูป รากที่ 5 ของจำนวนเชิงซ้อนมี 5 ราก เรียงตัวเป็นรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่าบนวงกลม แสดงให้เห็นว่ารากกระจายตัวกันอย่างสมมาตรและสม่ำเสมอ

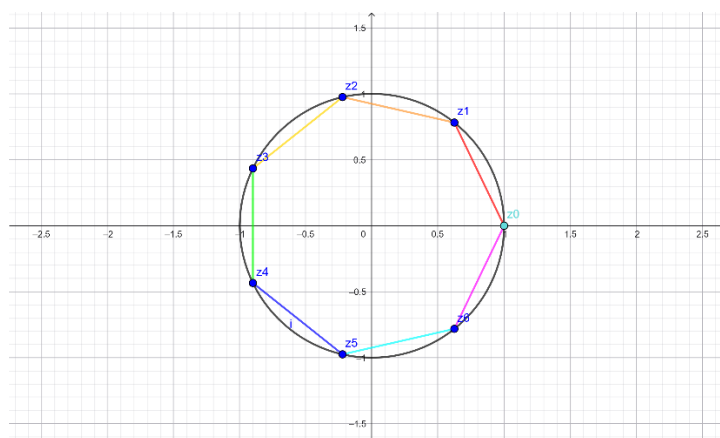
(รากที่ 6 ของ 1)



ภาพที่ 6 รูปหลายเหลี่ยมของ รากที่ 6 ของ 1

จากรูป รากที่ 6 ของจำนวนเชิงซ้อนมี 6 ราก เรียงเป็นรูปหกเหลี่ยมด้านเท่าบนวงกลม แสดงให้เห็นว่ารากทุกค่ามีระยะห่างเชิงมุมเท่ากัน

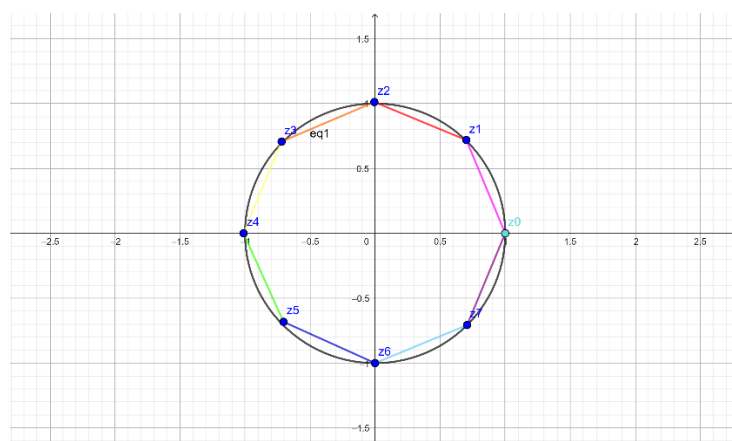
(รากที่ 7 ของ 1)



ภาพที่ 7 รูปหลายเหลี่ยมของ รากที่ 7 ของ 1

จากรูป รากที่ 7 ของจำนวนเชิงซ้อนมี 7 ราก เรียงตัวเป็นรูปเจ็ดเหลี่ยมด้านเท่าบนวงกลม แสดงให้เห็นว่ารากทุกค่ากระจายตัวกันอย่างสม่ำเสมอ

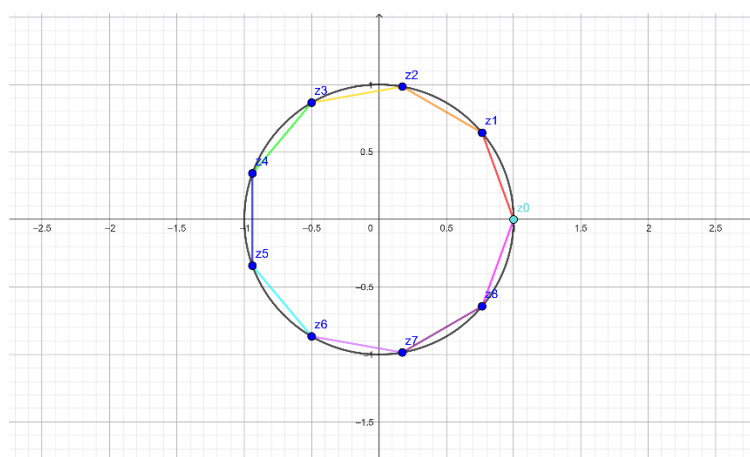
(รากที่ 8 ของ 1)



ภาพที่ 8 รูปหลายเหลี่ยมของ รากที่ 8 ของ 1

จากรูป รากที่ 8 ของจำนวนเชิงซ้อน มี 8 ราก เรียงตัวเป็นรูปแปดเหลี่ยมด้านเท่าบนวงกลม แสดงให้เห็นว่ารากมีตำแหน่งสมมาตรและมีมุมห่างกันเท่ากัน

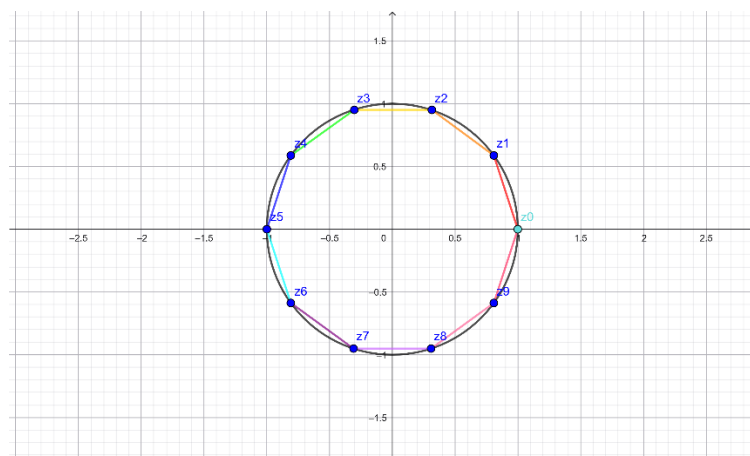
(รากที่ 9 ของ 1)



ภาพที่ 9 รูปหลายเหลี่ยมของ รากที่ 9 ของ 1

จากรูป รากที่ 9 ของจำนวนเชิงซ้อนมี 9 ราก เรียงตัวเป็นรูปเก้าเหลี่ยมด้านเท่าบนวงกลม แสดงให้เห็นว่า รากกระจายตัวอย่างสม่ำเสมอตามทฤษฎีบทของเดอมัวร์

(รากที่ 10 ของ 1)



ภาพที่ 10 รูปหลายเหลี่ยมของ รากที่ 10 ของ 1

จากรูป รากที่ 10 ของจำนวนเชิงซ้อนมี 10 ราก เรียงตัวเป็นรูปสิบเหลี่ยมด้านเท่าบนวงกลม แสดงให้เห็นว่า รากทั้งหมดมีระยะห่างเชิงมุมเท่ากัน และเป็นไปตามทฤษฎีบทของเดอมัวร์

จากการศึกษาการหารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน โดยใช้ทฤษฎีบทของเดอมัวร์ ตั้งแต่รากที่ 1 – 10 พบว่ารากทั้งหมดกระจายตัวกันอย่างสม่ำเสมอบนวงกลม และเรียงตัวเป็นรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่าที่มีจำนวนด้านเท่ากับจำนวนรากที่หาได้ โดยรากแต่ละรากมีระยะห่างเชิงมุมเท่ากัน แสดงให้เห็นถึงความสัมพันธ์ระหว่างการหารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อนกับรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่า และยืนยันว่าสอดคล้องกับทฤษฎีบทของเดอมัวร์

2.9 สรุปและอภิปรายผล

จากการศึกษาการหารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อนโดยใช้ทฤษฎีบทของเดอมัวร์ คณะผู้จัดทำได้ศึกษาหลักการสูตรและวิธีการคำนวณ พร้อมทั้งนำผลลัพธ์มาแสดงบนระนาบเชิงซ้อน เพื่อวิเคราะห์ลักษณะการกระจายตัวของรากและความสัมพันธ์กับทฤษฎีบทของเดอมัวร์ ผลการศึกษาสามารถสรุปได้ดังนี้

2.9.1 สรุปและอภิปรายผล

ทฤษฎีบทของเดอมัวร์สามารถนำมาใช้ในการหารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อนได้อย่างถูกต้อง เมื่อแสดงผลบนระนาบเชิงซ้อน รากทั้งหมดจะกระจายตัวอย่างสม่ำเสมอบนวงกลม และเรียงตัวเป็นรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่าที่มีจำนวนด้านเท่ากับจำนวนราก ซึ่งสอดคล้องกับหลักการทางคณิตศาสตร์

2.10 ปัญหาและอุปสรรค

ในการจัดทำโครงการครั้งนี้ปัญหาและอุปสรรคก็คือ

- การคำนวณมีหลายขั้นตอน จึงต้องใช้ความละเอียดรอบคอบ
- การเขียนแผนภาพบนระนาบเชิงซ้อนต้องกำหนดตำแหน่ง และมุมให้ถูกต้อง
- การจัดทำรายงานและเรียบเรียงข้อมูล จึงใช้เวลาค่อนข้างมาก

2.11 ข้อเสนอแนะ

- ควรศึกษาหลักการของจำนวนเชิงซ้อนและทฤษฎีบทของเดอมัวร์ให้เข้าใจก่อนลงมือคำนวณ
- ควรตรวจสอบผลการคำนวณทุกขั้นตอนเพื่อป้องกันข้อผิดพลาด
- สามารถศึกษาต่อยอดการประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทของเดอมัวร์ในหัวข้อทางคณิตศาสตร์อื่น ๆ ได้

บรรณานุกรม

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2562) . หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์
 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 2 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) ตามหลักสูตร
 แกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551. องค์การค้ำของ สกสศ (หน้าที่ 1-48)

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2563). จำนวนเชิงซ้อน ตอน 9 (จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว).
 โครงการสอนออนไลน์ - Project 14. <https://proj14.ipst.ac.th/m4-6-math-adv/m5-math-adv-book2/math-m5b2-009/> ค้นเมื่อ 1 กรกฎาคม 2569

สาขาคณิตศาสตร์มัธยมศึกษา สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2562). คู่มือครู รายวิชาเพิ่มเติม
 คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 2. คลังความรู้ SciMath. <https://www.scimath.org/ebook-mathematics/item/10898-5-2-10898> ค้นเมื่อ 10 กรกฎาคม 2569

ทรูปลูกปัญญา. (2564). จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว และทฤษฎีบทของเดอมัวร์. trueplookpanya.com
 ค้นเมื่อ 25 กรกฎาคม 2569

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก ตัวอย่างการคำนวณ

ภาคผนวก ข ภาพการดำเนินงาน

ภาคผนวก ค คณะผู้จัดทำ

ภาคผนวก ก ตัวอย่างการคำนวณ

หารากที่ 1 ของ 1 โดยใช้ทฤษฎีบทของเดอมัวร์

$$Z = 1 + 0i$$

$$\text{หา } r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + 0^2} = \sqrt{1} = 1$$

$$\text{หา } \theta = \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\theta = 0^\circ$$

$$\text{ใช้สูตร เดอมัวร์} \rightarrow z_k = \sqrt[n]{r} \left[\cos \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \right]$$

$$k_0 = \sqrt[1]{1} \left[\cos \left(\frac{0 + 2(0)\pi}{1} \right) + i \sin \left(\frac{0 + 2(0)\pi}{1} \right) \right]$$

$$= \sqrt[1]{1} \left[\cos \left(\frac{0\pi}{1} \right) + i \sin \left(\frac{0\pi}{1} \right) \right]$$

$$= \sqrt[1]{1} \left[\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ \right]$$

$$= 1 \neq$$

หารากที่ 3 ของ 1 โดยใช้ทฤษฎีบทของเดอมัวร์

$$Z = 1 + 0i$$

$$\text{หา } r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + 0^2} = \sqrt{1} = 1$$

$$\text{หา } \theta = \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\theta = 0^\circ$$

ใช้สูตรเดอมัวร์

$$z_k = \sqrt[n]{r} \left[\cos \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \right]$$

$$k_0 = \sqrt[3]{1} \left[\cos \left(\frac{0 + 2(0)\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{0 + 2(0)\pi}{3} \right) \right]$$

$$= \sqrt[3]{1} \left[\cos \left(\frac{0\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{0\pi}{3} \right) \right]$$

$$= 1 \neq$$

$$k_1 = \sqrt[3]{1} \left[\cos \left(\frac{0 + 2(1)\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{0 + 2(1)\pi}{3} \right) \right]$$

$$= \sqrt[3]{1} \left[\cos \left(\frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{2\pi}{3} \right) \right]$$

$$k_2 = \sqrt[3]{1} \left[\cos \left(\frac{0 + 2(2)\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{0 + 2(2)\pi}{3} \right) \right]$$

$$= \sqrt[3]{1} \left[\cos \left(\frac{4\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{4\pi}{3} \right) \right]$$

$$\therefore k_0 = 1$$

$$k_1 = \cos \left(\frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{2\pi}{3} \right)$$

$$k_2 = \cos \left(\frac{4\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{4\pi}{3} \right) \neq$$

หารากที่ 4 ของ 1 โดยใช้ทฤษฎีบทของเดอมัวร์

$$Z = 1 + 0i$$

$$\text{หา } r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + 0^2} = \sqrt{1} = 1$$

$$\text{หา } \theta = \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\theta = 0^\circ$$

ใช้สูตรเดอมัวร์

$$z_k = \sqrt[n]{r} \left[\cos \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \right]$$

$$k_0 = \sqrt[4]{1} \left[\cos \left(\frac{0 + 2(0)\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{0 + 2(0)\pi}{4} \right) \right]$$

$$= \sqrt[4]{1} \left[\cos \left(\frac{0\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{0\pi}{4} \right) \right]$$

$$= 1 \neq$$

$$k_1 = \sqrt[4]{1} \left[\cos \left(\frac{0 + 2(1)\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{0 + 2(1)\pi}{4} \right) \right]$$

$$= \sqrt[4]{1} \left[\cos \left(\frac{2\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{2\pi}{4} \right) \right]$$

$$= \sqrt[4]{1} \left[\cos \left(\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} \right) \right]$$

$$k_2 = \sqrt[4]{1} \left[\cos \left(\frac{0 + 2(2)\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{0 + 2(2)\pi}{4} \right) \right]$$

$$= \sqrt[4]{1} \left[\cos \left(\frac{4\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{4\pi}{4} \right) \right]$$

$$= \sqrt[4]{1} \left[\cos (\pi) + i \sin (\pi) \right]$$

$$k_3 = \sqrt[4]{1} \left[\cos \left(\frac{0 + 2(3)\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{0 + 2(3)\pi}{4} \right) \right]$$

$$= \sqrt[4]{1} \left[\cos \left(\frac{6\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{6\pi}{4} \right) \right]$$

$$= \sqrt[4]{1} \left[\cos \left(\frac{3\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{3\pi}{2} \right) \right]$$

$$\therefore k_0 = 1$$

$$k_1 = \cos \left(\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} \right)$$

$$k_2 = \cos (\pi) + i \sin (\pi)$$

$$k_3 = \cos \left(\frac{3\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{3\pi}{2} \right) \neq$$

ภาคผนวก ข ภาพการดำเนินงานโครงการ



ภาคผนวก ค คณะผู้จัดทำ

คณะผู้จัดทำและครูที่ปรึกษาโครงงาน
โครงงานคณิตศาสตร์ เรื่อง ถอดรหัสรากที่ n สู่รูปหลายเหลี่ยมบนระนาบเชิงซ้อน
โรงเรียนครนพิทยาคม จังหวัดชุมพร

นางสาววัลยา โพธิ์เอื้อง

ตำแหน่ง ครู วิทยฐานะครูชำนาญการพิเศษ
ครูที่ปรึกษาโครงงาน

นางอรรตน์ พึ่งพงษ์

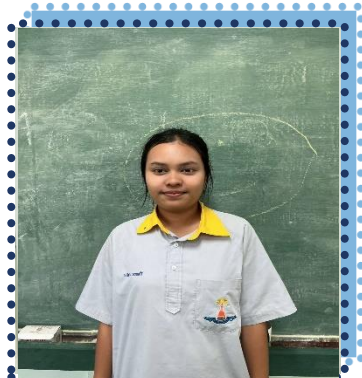
ตำแหน่ง ครู วิทยฐานะครูชำนาญการพิเศษ
ครูที่ปรึกษาโครงงาน



นางสาวชญานุช พู่ทอง
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5/1
คณะผู้จัดทำโครงงาน



นางสาวชญานิตย์ พู่ทอง
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5/1
คณะผู้จัดทำโครงงาน



นางสาววันวิสา วรรณศิริ
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4/1
คณะผู้จัดทำโครงงาน



โครงการคณิตศาสตร์ประเภท ทฤษฎี ระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย
โรงเรียนครนพิทยาคม อำเภอสี จังหวัดชุมพร
ปีพุทธศักราช 2569