

ทฤษฎีบทธงชาติอังกฤษสำหรับแปดเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า
(British Flag Theorem for Regular Octagon)

ผู้จัดทำ

นางสาวรัชสิกา รัตนมณี

นางสาวรัตติกาล คงอินทร์

นางสาววริศศินี ทองเรือง

ครูที่ปรึกษา

นายชนพัฒน์ แวสง่า

นางสาวอาทิตยา แสงกระจ่าง

โครงการงานประเภททฤษฎี ระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย

โรงเรียนบ้านคลองสงค์

ปีทีส่งเข้าประกวด 2569

บทคัดย่อ

โครงการคณิตศาสตร์ เรื่อง ทฤษฎีบทธงชาติอังกฤษสำหรับแปดเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า (British Flag Theorem for Regular Octagon) เป็นการศึกษาต่อยอดจากทฤษฎีบทธงชาติอังกฤษ ซึ่งกล่าวถึงสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีจุดใด ๆ อยู่ภายในรูปสี่เหลี่ยม ถ้า $ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า และ P เป็นจุดบนระนาบอยู่ภายในรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า $ABCD$ แล้ว $PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$

โครงการคณิตศาสตร์เล่มนี้ต่อยอดโดยการพิสูจน์ว่าทฤษฎีบทธงชาติอังกฤษสามารถใช้สำหรับแปดเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าได้ โดยกำหนดให้ $ABCDEFGH$ เป็นรูปแปดเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า โดยมี P เป็นจุดใด ๆ ซึ่งการพิสูจน์จะพิสูจน์ด้วยทฤษฎีบทอะพอลโลเนียส (Apollonius' Theorem) และเรขาคณิตวิเคราะห์ (Analytic Geometry) จากการหาความสัมพันธ์จากทฤษฎีบทอะพอลโลเนียส และเรขาคณิตวิเคราะห์ พบว่า $PA^2 + PE^2 = PB^2 + PF^2 = PC^2 + PG^2 = PD^2 + PH^2$ นั่นคือผลบวกกำลังสองของเส้นคู่ตรงข้ามที่ลากจากมุมไปยังจุดใด ๆ ภายในรูปแปดเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า มีขนาดเท่ากัน

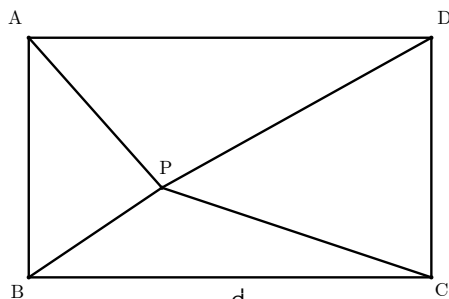
คำสำคัญ: แปดเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า; ทฤษฎีบทอะพอลโลเนียส; เรขาคณิตวิเคราะห์

สารบัญ

เรื่อง	หน้า
บทคัดย่อ	(i)
สารบัญ	(ii)
ความเป็นมาของโครงการ	1
จุดประสงค์ของโครงการ	1
เนื้อหาทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง	2
วิธีดำเนินงาน	6
ผลการดำเนินงาน	19
ข้อเสนอแนะ	20
เอกสารอ้างอิง	21
ภาคผนวก	22

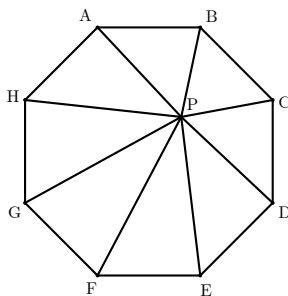
ความเป็นมาของโครงการ

ทฤษฎีบทวงรีอังกฤษ เป็นทฤษฎีบทที่สนใจเกี่ยวกับสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีจุดใด ๆ อยู่ภายในรูปสี่เหลี่ยม ถ้า $ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าและ P เป็นจุดใด ๆ อยู่ภายในรูปสี่เหลี่ยม $ABCD$ แล้ว $PA^2 + PC^2 = PD^2 + PB^2$



ภาพที่ 1

ทางคณะผู้จัดทำจึงมีแนวคิดที่จะนำทฤษฎีบทวงรีอังกฤษมาใช้สำหรับรูปแบบเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า ที่มีจุดใด ๆ อยู่ภายในรูปแปดเหลี่ยม โดยการพิสูจน์ด้วยทฤษฎีบทอะพอลโลเนียส และเรขาคณิตวิเคราะห์



ภาพที่ 2

จุดประสงค์ของโครงการ

เพื่อแสดงความสัมพันธ์ของผลบวกกำลังสองของเส้นคู่ตรงข้ามที่ลากจากจุดใด ๆ ภายในรูปแปดเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า โดยใช้ทฤษฎีบทอะพอลโลเนียส และเรขาคณิตวิเคราะห์

เนื้อหาทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง

ในการจัดทำโครงงาน เรื่อง ทฤษฎีบทธงชาติอังกฤษสำหรับแปดเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า (British flag theorem for regular octagon) โดยใช้ทฤษฎีบทอะพอลโลเนียส และเรขาคณิตวิเคราะห์ ผู้จัดทำได้ศึกษาเอกสารที่เกี่ยวข้อง ดังต่อไปนี้

ใน ค.ศ. 1848 Dionysius Lardner ได้ค้นพบทฤษฎีบทธงชาติอังกฤษ ซึ่งเป็นทฤษฎีบทที่น่าสนใจเกี่ยวกับสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีจุดใดๆ อยู่ภายในสี่เหลี่ยม โดย Lardner รวมทฤษฎีบทนี้ไว้ในสิ่งที่เขาเรียกว่า “The most useful and remarkable theorem which may be inferred” จากผลลัพธ์ใน เล่ม 2 ของ Euclid's Elements

บทนิยาม รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส คือ รูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านตรงข้ามขนานกัน 2 คู่ ด้านทุกด้านยาวเท่ากัน และมุมทุกมุมเป็นมุมฉาก

บทนิยาม รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า คือ รูปสี่เหลี่ยมที่มีมุมทุกมุมเป็นมุมฉาก ด้านตรงข้ามยาวเท่ากัน และขนานกัน 2 คู่ ด้านที่อยู่ติดกันยาวไม่เท่ากัน เส้นทแยงมุมยาวเท่ากันแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน

บทนิยาม รูปแปดเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า (Regular octagon) คือ รูปแปดเหลี่ยมที่มีด้านทุกด้านยาวเท่ากันและมีมุมเท่ากันทุกมุมคือ 135 องศา

บทนิยาม เส้นตรงสองเส้นขนานกัน ก็ต่อเมื่อ เส้นตรงสองเส้นอยู่บนระนาบเดียวกันและไม่ตัดกัน

บทนิยาม เส้นทแยงมุม คือ เส้นตรงที่ลากผ่านจุดยอดสองจุดที่ไม่อยู่ติดกันบนรูปหลายเหลี่ยมหรือทรงหลายหน้า

บทนิยาม เส้นมัธยฐาน คือเส้นตรงที่ลากผ่านจุดกึ่งกลางบนด้านของรูปสามเหลี่ยมไปยังจุดยอดที่อยู่ตรงข้าม

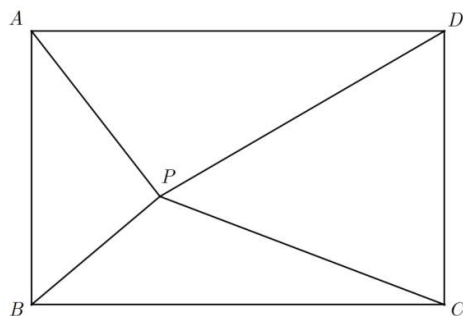
บทนิยาม ระบบพิกัดฉาก 2 มิติ จะประกอบด้วยเส้นจำนวน 2 เส้นตั้งฉากกัน เรียกเส้นจำนวนทั้ง 2 เส้น นั้นว่า แกนพิกัด (Coordinate axes) แกนพิกัดนี้จะตัดกันที่จุด O เรียกจุด O ว่าจุดกำเนิด (Origin) ของแกนพิกัด แล้วให้แกนแนวนอนเป็นแกน x (x - axis) และแกนแนวตั้งเป็นแกน y (y -axis)

บทนิยาม การเคลื่อนที่ของรูปเรขาคณิต คือ การเปลี่ยนตำแหน่งของรูปเรขาคณิตบนระนาบ โดยที่ ระยะห่างระหว่างจุดสองจุดใด ๆ ของรูปนั้นไม่เปลี่ยนแปลง

บทนิยาม การหมุนบนระนาบ คือ การแปลงทางเรขาคณิตที่มีจุด O ที่ตรึงจุดหนึ่งเป็นจุดหมุนหรือจุดศูนย์กลางของการหมุน แต่ละจุด P บนระนาบ มีจุด P' เป็นจุดที่สมนัยกับจุด P และเป็นภาพที่ได้จากการหมุนจุด P รอบจุด O ตามทิศทางที่กำหนดด้วยมุมที่มีขนาด k องศา โดยที่ $OP = OP'$

สมมติให้ $ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า และ P เป็นจุดบนระนาบอยู่ภายในรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า $ABCD$ แล้ว

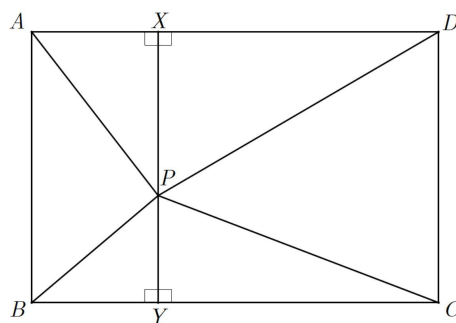
$$PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$$



ภาพที่ 1

การพิสูจน์

- สร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉากโดยลากเส้นผ่านจุด P ตั้งฉากกับ $\overline{AD}$ และ $\overline{BC}$ จะได้ $\square AXYB$ และ $\square CDXY$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า



ภาพที่ 3

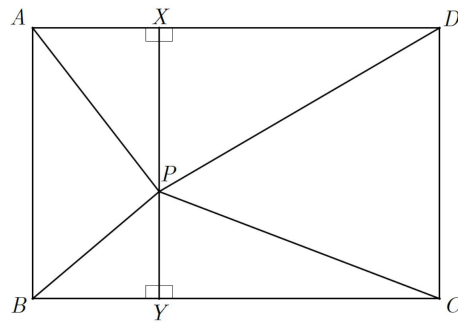
- พิจารณาสามเหลี่ยมมุมฉาก $\triangle APX$, $\triangle BPY$, $\triangle CPY$ และ $\triangle DPX$ จากทฤษฎีบทพีทาโกรัสจะได้

$$PA^2 = AX^2 + XP^2 \quad (1)$$

$$PB^2 = BY^2 + YP^2 \quad (2)$$

$$PC^2 = CY^2 + YP^2 \quad (3)$$

$$PD^2 = DX^2 + XP^2 \quad (4)$$



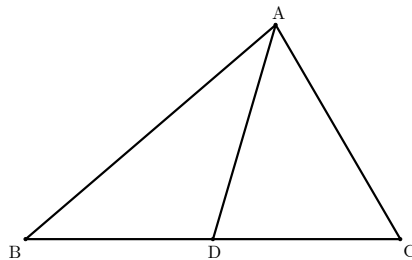
ภาพที่ 3

3. นำ (1) + (3) จะได้ $PA^2 + PC^2 = AX^2 + XP^2 + CY^2 + YP^2$
 และนำ (2) + (4) จะได้ $PB^2 + PD^2 = BY^2 + YP^2 + DX^2 + XP^2$
 4. เนื่องจาก $\square AXYB$ และ $\square CDXY$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า
 จะได้ $AX = BY$ และ $CY = DX$
 ดังนั้น $AX^2 + XP^2 + CY^2 + YP^2 = BY^2 + YP^2 + DX^2 + XP^2$
 ส่งผลให้ $PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$

□

ทฤษฎีบท 1 ทฤษฎีบทอะพอลโลเนียส กล่าวถึงความสัมพันธ์ของความยาวด้านของรูปสามเหลี่ยมกับความยาวของเส้นมัธยฐาน ถ้ารูปสามเหลี่ยม ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมใด ๆ ถ้า $\overline{AD}$ เป็นเส้นมัธยฐาน แล้ว

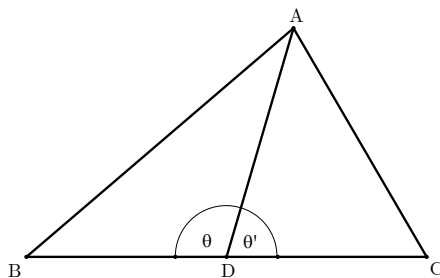
$$AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$$



ภาพที่ 4

การพิสูจน์

1. ให้ $\angle ADB = \theta$ และ $\angle ADC = \theta'$



ภาพที่ 4

2. พิจารณา $\triangle ABD$ จากกฎของโคไซน์

$$\text{จะได้ } AB^2 = BD^2 + AD^2 - 2 \times AD \times BD \cos \theta \quad (1)$$

3. พิจารณา $\triangle ADC$ จากกฎของโคไซน์

$$\text{จะได้ } AC^2 = CD^2 + AD^2 - 2 \times AD \times CD \cos \theta'$$

$$AC^2 = CD^2 + AD^2 + 2 \times AD \times CD \cos \theta \quad (2)$$

4. นำ (1) + (2)

$$\text{จะได้ } AB^2 + AC^2 = BD^2 + CD^2 + AD^2 + AD^2$$

5. เนื่องจากเส้นมัธยฐานแบ่งครึ่งส่วนของเส้นตรง BC จะได้ $BD = CD$

$$\text{ดังนั้น } AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$$

ทฤษฎีบท 2 ถ้า $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$ เป็นจุดในระนาบ แล้วระยะทางระหว่างจุด P_1 และ P_2 เท่ากับ $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ หน่วย

วิธีดำเนินการ

ในการจัดทำโครงงาน เรื่อง ทฤษฎีบทธงชาติอังกฤษสำหรับแปดเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า (British flag theorem for regular octagon) มีขั้นตอนการดำเนินงานดังนี้

1. วัสดุ/อุปกรณ์
2. ขั้นตอนการดำเนินการ
3. วิธีการดำเนินงาน

1. วัสดุ/อุปกรณ์

- 1.1 อุปกรณ์เครื่องเขียน
- 1.2 เครื่องคอมพิวเตอร์สำหรับโปรแกรม Geometer's Sketchpad

2 ขั้นตอนการดำเนินการ

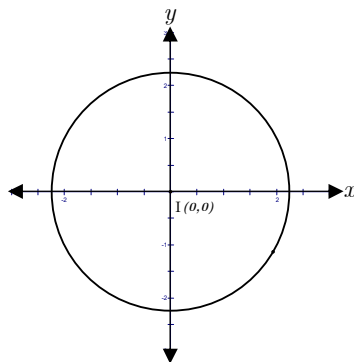
- 2.1 สมาชิกในกลุ่มประชุมวางแผนเพื่อกำหนดหัวข้อโครงงาน และวางแผนการดำเนินงาน
- 2.2 ศึกษาหาความรู้จากหนังสือ บทความ และเอกสารออนไลน์ เรื่องเรขาคณิต และเรื่องเรขาคณิตวิเคราะห์
- 2.3 ปรึกษาครูที่ปรึกษา ศึกษา ค้นคว้า หาแนวทางดำเนินการ และหาแนวทางการพัฒนาต่อยอด
- 2.4 เขียนและนำเสนอเค้าโครงโครงงานต่อครูเพื่อรับฟังข้อคิดเห็น และข้อเสนอแนะในการจัดทำโครงงาน
- 2.5 ดำเนินการทางคณิตศาสตร์และสร้างรูปแปดเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าเพื่อแสดงการพิสูจน์ทฤษฎีบทธงชาติอังกฤษสำหรับความสัมพันธ์ของผลบวกกำลังสองของเส้นคู่ตรงข้ามที่ลากจากมุมไปยังจุดใด ๆ ภายในรูปแปดเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า โดยใช้ทฤษฎีบทพีทาโกรัส และการใช้เรขาคณิตวิเคราะห์
- 2.6 นำเสนอความก้าวหน้าของโครงงานต่อครูที่ปรึกษาเพื่อรับฟังข้อคิดเห็น และข้อเสนอแนะ
- 2.7 สรุปผลการดำเนินงาน ประชุมอภิปรายปัญหาต่าง ๆ ร่วมกับครูที่ปรึกษา เพื่อรับฟังข้อคิดเห็น และข้อเสนอแนะ
- 2.8 จัดพิมพ์เล่มโครงงานฉบับสมบูรณ์ ตรวจสอบความถูกต้อง ความสมบูรณ์ของโครงงาน

3. วิธีการดำเนินงาน

การสร้างรูปแปดเหลี่ยม

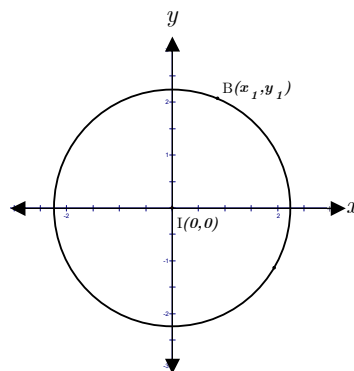
สามารถสร้างรูปแปดเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าได้ ดังนี้

1. สร้างวงกลม I ลงบนระบบพิกัดฉาก จุดศูนย์กลางมีพิกัด $(0, 0)$



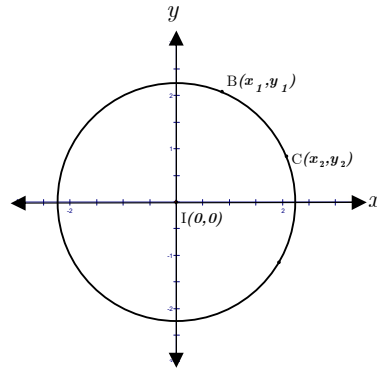
ภาพที่ 5

2. สร้างจุด B บนเส้นรอบวงของวงกลม I จะได้พิกัดเป็น $B(x_1, y_1)$



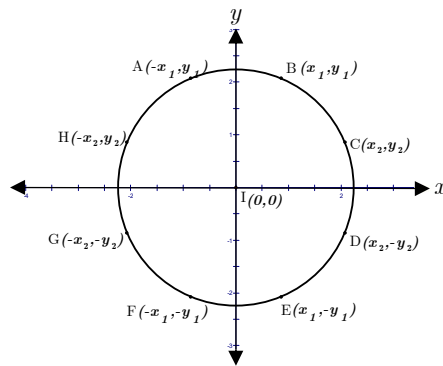
ภาพที่ 6

3. สร้างจุด C บนเส้นรอบวงของวงกลม I โดยใช้การหมุนจุด B ขนาด 45 องศา ทิศตามเข็มนาฬิกา รอบจุด I จะได้พิกัดเป็น $C(x_2, y_2)$



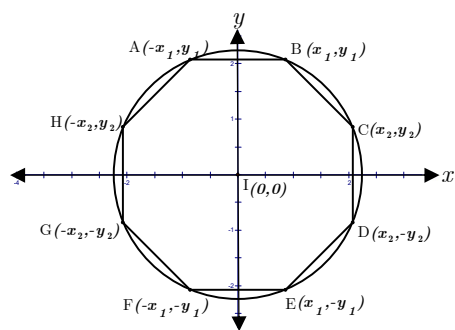
ภาพที่ 7

4. สร้างจุด D, E, F, G, H และ A ตามลำดับโดยใช้วิธีการเดียวกับการสร้างจุด C โดยใช้จุดก่อนหน้าทีสร้างขึ้นเป็นจุดหมุน หมุนรอบจุด I ขนาด 45 องศา ทิศตามเข็มนาฬิกา จะได้พิกัดเป็น $D(x_2, -y_2), E(x_1, -y_1), F(-x_1, -y_1), G(-x_2, -y_2), H(-x_2, y_2)$ และ $A(-x_1, y_1)$



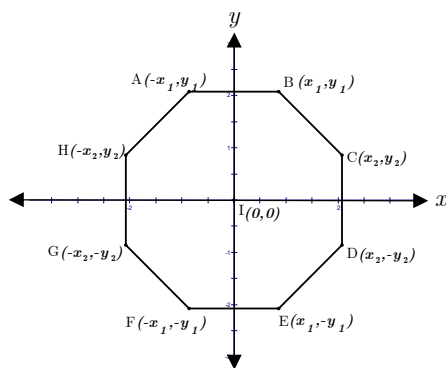
ภาพที่ 8

5. สร้างส่วนของเส้นตรง BC , CD , DE , EF , FG , GH และ HA



ภาพที่ 9

6. จะได้รูปแปดเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า ดังรูป

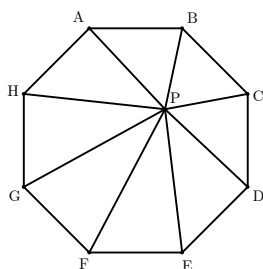


ภาพที่ 10

ผู้จัดทำจะแสดงความสัมพันธ์ของผลบวกกำลังสองของเส้นคู่ตรงข้ามที่ลากจากจุดใด ๆ ภายในรูปแปดเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า โดยใช้ทฤษฎีบทของอะพอลโลเนียส และเรขาคณิตวิเคราะห์ ดังนี้

ทฤษฎีบท สมมติให้ $ABCDEFGH$ เป็นรูปแปดเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า และจุด P เป็นจุดใด ๆ อยู่ภายในรูปแปดเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า จะได้

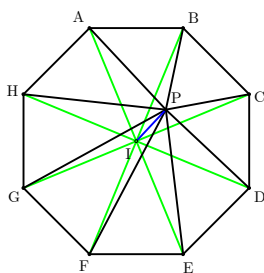
$$PA^2 + PE^2 = PB^2 + PF^2 = PC^2 + PG^2 = PD^2 + PH^2$$



ภาพที่ 11

การพิสูจน์ โดยใช้ทฤษฎีบทของอะพอลโลเนียส

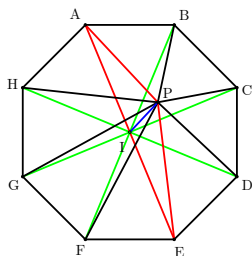
1. ให้จุด I เป็นจุดตัดของเส้นทแยงมุม $\overline{AE}, \overline{BF}, \overline{CG}$ และ $\overline{DH}$ จากนั้นลากเส้นเชื่อมจุด P กับ จุด I



ภาพที่ 12

2. พิจารณา $\triangle PAE$ โดยใช้ทฤษฎีบทของอะพอลโลเนียส จะได้

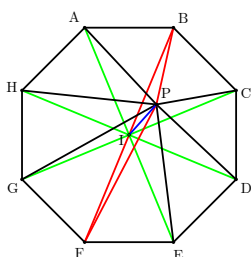
$$PA^2 + PE^2 = 2(PI^2 + AI^2)$$



ภาพที่ 13

3. พิจารณา $\triangle PBF$ โดยใช้ทฤษฎีบทของอะพอลโลเนียส จะได้

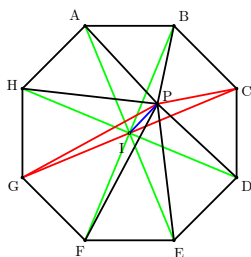
$$PB^2 + PF^2 = 2(PI^2 + BI^2)$$



ภาพที่ 14

4. พิจารณา $\triangle PCG$ โดยใช้ทฤษฎีบทของอะพอลโลเนียส จะได้

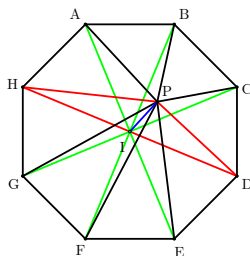
$$PC^2 + PG^2 = 2(PI^2 + CI^2)$$



ภาพที่ 15

5. พิจารณา $\triangle PDH$ โดยใช้ทฤษฎีบทของอะพอลโลเนียส จะได้

$$PD^2 + PH^2 = 2(PI^2 + DI^2)$$



ภาพที่ 16

6. เนื่องจากรูปแปดเหลี่ยม $ABCDEFGH$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า ทำให้ $AE = BF = CG = DH$ และจาก I เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม ทำให้ $AI = BI = CI = DI = EI = FI = GI = HI$

7. จาก $AI = BI = CI = DI = EI = FI = GI = HI$

$$\text{ทำให้ } PA^2 + PE^2 = 2(PI^2 + AI^2)$$

$$PB^2 + PF^2 = 2(PI^2 + BI^2)$$

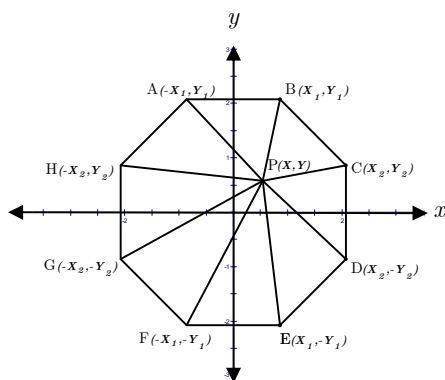
$$PC^2 + PG^2 = 2(PI^2 + CI^2)$$

$$PD^2 + PH^2 = 2(PI^2 + DI^2)$$

8. ดังนั้น $PA^2 + PE^2 = PB^2 + PF^2 = PC^2 + PG^2 = PD^2 + PH^2$

การพิสูจน์ โดยใช้เรขาคณิตวิเคราะห์

1. กำหนดให้จุด P เป็นจุดใด ๆ ที่อยู่ภายในรูปแปดเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า



ภาพที่ 17

2. จากสูตร การหาระยะห่างระหว่างจุดสองจุด $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

$$\text{จะได้ } PA^2 = (x + x_1)^2 + (y - y_1)^2 \quad (1)$$

$$PB^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 \quad (2)$$

$$PC^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 \quad (3)$$

$$PD^2 = (x - x_2)^2 + (y + y_2)^2 \quad (4)$$

$$PE^2 = (x - x_1)^2 + (y + y_1)^2 \quad (5)$$

$$PF^2 = (x + x_1)^2 + (y + y_1)^2 \quad (6)$$

$$PG^2 = (x + x_2)^2 + (y + y_2)^2 \quad (7)$$

$$PH^2 = (x + x_2)^2 + (y - y_2)^2 \quad (8)$$

3. นำ (1) + (5), (2) + (6), (3) + (7) และ (4) + (8) ตามลำดับ

$$\text{จะได้ } PA^2 + PE^2 = (x + x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (x - x_1)^2 + (y + y_1)^2$$

$$PB^2 + PF^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (x + x_1)^2 + (y + y_1)^2$$

$$PC^2 + PG^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (x + x_2)^2 + (y + y_2)^2$$

$$PD^2 + PH^2 = (x - x_2)^2 + (y + y_2)^2 + (x + x_2)^2 + (y - y_2)^2$$

4. นั่นคือ

$$PA^2 + PE^2 = (x^2 + 2xx_1 + x_1^2) + (y^2 - 2yy_1 + y_1^2) \\ + (x^2 - 2xx_1 + x_1^2) + (y^2 + 2yy_1 + y_1^2)$$

$$PB^2 + PF^2 = (x^2 - 2xx_1 + x_1^2) + (y^2 - 2yy_1 + y_1^2) \\ + (x^2 + 2xx_1 + x_1^2) + (y^2 + 2yy_1 + y_1^2)$$

$$PC^2 + PG^2 = (x^2 - 2xx_2 + x_2^2) + (y^2 - 2yy_2 + y_2^2) \\ + (x^2 + 2xx_2 + x_2^2) + (y^2 + 2yy_2 + y_2^2)$$

$$PD^2 + PH^2 = (x^2 - 2xx_2 + x_2^2) + (y^2 + 2yy_2 + y_2^2) \\ + (x^2 + 2xx_2 + x_2^2) + (y^2 - 2yy_2 + y_2^2)$$

5. ดังนั้น

$$PA^2 + PE^2 = 2x^2 + 2x_1^2 + 2y^2 + 2y_1^2 \quad (9)$$

$$PB^2 + PF^2 = 2x^2 + 2x_1^2 + 2y^2 + 2y_1^2 \quad (10)$$

$$PC^2 + PG^2 = 2x^2 + 2x_2^2 + 2y^2 + 2y_2^2 \quad (11)$$

$$PD^2 + PH^2 = 2x^2 + 2x_2^2 + 2y^2 + 2y_2^2 \quad (12)$$

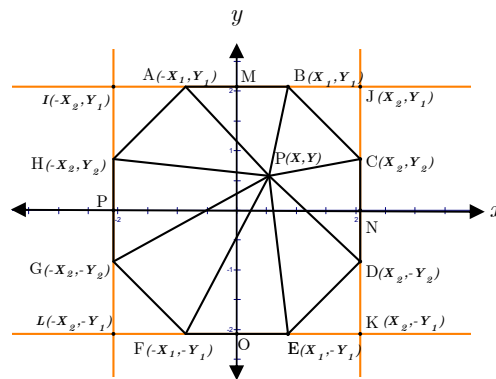
6. จะเห็นว่า $(9) = (10)$ และ $(11) = (12)$

$$\text{นั่นคือ} \quad PA^2 + PE^2 = PB^2 + PF^2 \text{ และ } PC^2 + PG^2 = PD^2 + PH^2$$

ต้องการพิสูจน์ว่า $x_1 = y_2$ และ $x_2 = y_1$

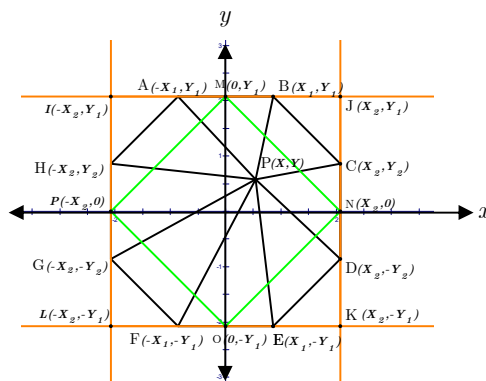
การพิสูจน์ $x_2 = y_1$ โดยการสร้างรูป

1. สร้างเส้นตรง IJ ขนานแกน x ผ่านจุด A และ B จะได้ M เป็นจุดตัดแกน y
สร้างเส้นตรง JK ขนานแกน y ผ่านจุด C และ D จะได้ N เป็นจุดตัดแกน x
สร้างเส้นตรง KL ขนานแกน x ผ่านจุด E และ F จะได้ O เป็นจุดตัดแกน y
สร้างเส้นตรง LI ขนานแกน y ผ่านจุด G และ H จะได้ P เป็นจุดตัดแกน x
ทำให้ $IJKL$ เป็นรูปสี่เหลี่ยม ดังรูป



ภาพที่ 18

2. สร้างเส้นตรง MN, NO, OP และ PM ตามลำดับ จะได้ $\square MNOP$ ดังรูป

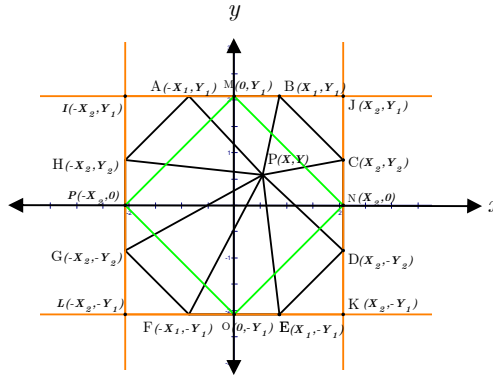


ภาพที่ 19

3. พิจารณา $\square MNOP$

จากสูตร การหาระยะห่างระหว่างจุดสองจุด $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

$$\begin{aligned} \text{จะได้} \quad MN^2 &= (0 - x_2)^2 + (y_1 - 0)^2 = x_2^2 + y_1^2 \\ NO^2 &= (x_2 - 0)^2 + (0 + y_1)^2 = x_2^2 + y_1^2 \\ OP^2 &= (0 + x_2)^2 + (-y_1 - 0)^2 = x_2^2 + y_1^2 \\ PM^2 &= (-x_2 - 0)^2 + (0 - y_1)^2 = x_2^2 + y_1^2 \end{aligned}$$



ภาพที่ 19

4. ดังนั้น $\square MNOP$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส เนื่องจากด้านทุกด้านยาวเท่ากัน และเส้นทแยงมุมตัดกันเป็นมุมฉาก
5. พิจารณา $\square IJKL$ กับจุด M, N, O และ P

จากการหาระยะห่างระหว่างจุดสองจุด $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

$$\text{จะได้} \quad IM^2 = (-x_2 - 0)^2 + (y_1 - y_1)^2 = x_2^2 \quad (1)$$

$$JM^2 = (x_2 - 0)^2 + (y_1 - y_1)^2 = x_2^2 \quad (2)$$

$$JN^2 = (x_2 - x_2)^2 + (y_1 - 0)^2 = y_1^2 \quad (3)$$

$$KN^2 = (x_2 - x_2)^2 + (-y_1 - 0)^2 = y_1^2 \quad (4)$$

$$KO^2 = (x_2 - 0)^2 + (-y_1 + y_1)^2 = x_2^2 \quad (5)$$

$$LO^2 = (-x_2 - 0)^2 + (-y_1 + y_1)^2 = x_2^2 \quad (6)$$

$$LP^2 = (-x_2 + x_2)^2 + (-y_1 - 0)^2 = y_1^2 \quad (7)$$

$$IP^2 = (-x_2 + x_2)^2 + (y_1 - 0)^2 = y_1^2 \quad (8)$$

6. จาก (1) = (2) จะได้ว่า จุด M แบ่งครึ่งด้าน IJ

$$(3) = (4) \text{ จะได้ว่า จุด } N \text{ แบ่งครึ่งด้าน } JK$$

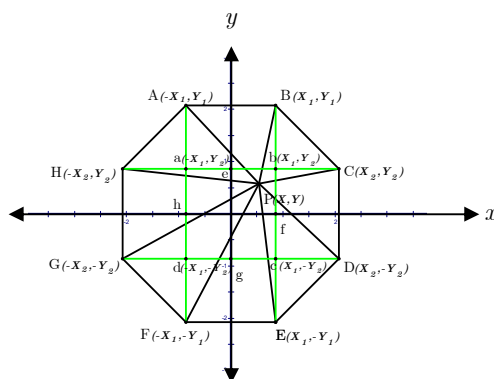
$$(4) = (6) \text{ จะได้ว่า จุด } O \text{ แบ่งครึ่งด้าน } KL$$

(7) = (8) จะได้ว่า จุด P แบ่งครึ่งด้าน LI

7. ดังนั้น จุด M, N, O และ P แบ่งครึ่ง $\overline{IJ}, \overline{JK}, \overline{KL}$ และ $\overline{LI}$ ตามลำดับ
8. จาก $\square MNOP$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ส่งผลให้ $\square IJKL$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส
9. เนื่องจากจุด M, N, O และ P แบ่งครึ่ง $\overline{IJ}, \overline{JK}, \overline{KL}$ และ $\overline{LI}$ ตามลำดับ
และจาก $\square IJKL$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ที่มีจุดกึ่งกลางที่อยู่พิพัต $(0, 0)$
ส่งผลให้ พิกัด $J(x_2, y_1)$ อยู่ห่างจากแกน x และแกน y เท่ากัน
10. ดังนั้น จะได้ว่า $x_2 = y_1$

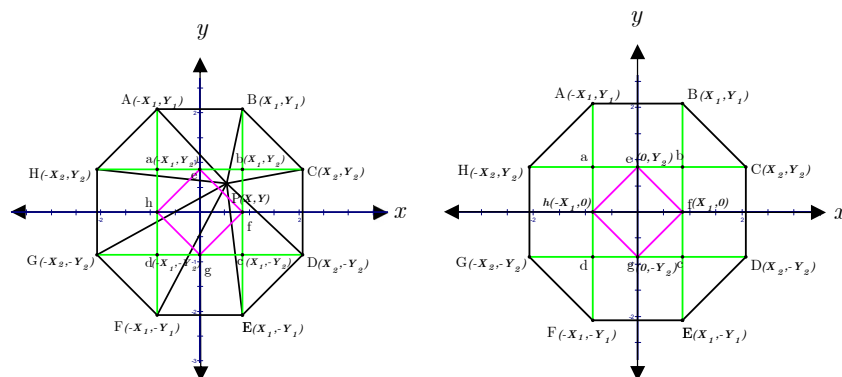
การพิสูจน์ $x_1 = y_2$ โดยการสร้างรูป

1. สร้างเส้นตรง AF ขนานแกน y จะได้ h เป็นจุดตัดแกน x
สร้างเส้นตรง BE ขนานแกน y จะได้ f เป็นจุดตัดแกน x
สร้างเส้นตรง CH ขนานแกน x จะได้ e เป็นจุดตัดแกน y
สร้างเส้นตรง DG ขนานแกน x จะได้ g เป็นจุดตัดแกน y
จะได้ $abcd$ เป็นรูปสี่เหลี่ยม



ภาพที่ 20

2. สร้างเส้นตรง ef, fg, gh และ he ตามลำดับ จะได้ $\square efgh$ ดังรูป



ภาพที่ 21

3. พิจารณา $\square efgh$

จากสูตร การหาระยะห่างระหว่างจุดสองจุด $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

$$\text{จะได้ } ef^2 = (0 - x_1)^2 + (y_2 - 0)^2 = x_1^2 + y_2^2$$

$$fg^2 = (x_1 - 0)^2 + (0 - y_2)^2 = x_1^2 + y_2^2$$

$$gh^2 = (0 + x_1)^2 + (-y_2 - 0)^2 = x_1^2 + y_2^2$$

$$he^2 = (-x_1 - 0)^2 + (0 - y_2)^2 = x_1^2 + y_2^2$$

4. ดังนั้น $\square efgh$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส เนื่องจากด้านทุกด้านยาวเท่ากัน และเส้นทแยงมุมตัดกันเป็นมุมฉาก

5. พิจารณา $\square efgh$ กับจุด e, f, g และ h

จากสูตร การหาระยะห่างระหว่างจุดสองจุด $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

$$\text{จะได้ } ae^2 = (-x_1 - 0)^2 + (y_2 - y_2)^2 = x_1^2 \quad (1)$$

$$be^2 = (x_1 - 0)^2 + (y_2 - y_2)^2 = x_1^2 \quad (2)$$

$$bf^2 = (x_1 - x_1)^2 + (y_2 - 0)^2 = y_2^2 \quad (3)$$

$$cf^2 = (x_1 - x_1)^2 + (-y_2 - 0)^2 = y_2^2 \quad (4)$$

$$cg^2 = (x_1 - 0)^2 + (-y_2 + y_2)^2 = x_1^2 \quad (5)$$

$$dg^2 = (-x_1 - 0)^2 + (-y_2 + y_2)^2 = x_1^2 \quad (6)$$

$$dh^2 = (-x_1 + x_1)^2 + (-y_2 - 0)^2 = y_2^2 \quad (7)$$

$$ah^2 = (-x_1 + x_1)^2 + (y_2 - 0)^2 = y_2^2 \quad (8)$$

6. จาก $(1) = (2)$ จะได้ว่า จุด e แบ่งครึ่งด้าน ab
 $(3) = (4)$ จะได้ว่า จุด f แบ่งครึ่งด้าน bc
 $(5) = (6)$ จะได้ว่า จุด g แบ่งครึ่งด้าน cd
 $(7) = (8)$ จะได้ว่า จุด h แบ่งครึ่งด้าน da
7. ดังนั้น จุด e, f, g และ h แบ่งครึ่ง $\overline{ab}, \overline{bc}, \overline{cd}$ และ $\overline{da}$ ตามลำดับ
8. เนื่องจาก $\square efgh$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ส่งผลให้ $\square abcd$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส
9. และจาก $\square efgh$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ที่มีจุดกึ่งกลางที่อยู่พิงัด $(0,0)$
 ส่งผลให้ พิกัด $b(x_1, y_2)$ อยู่ห่างจากแกน x และแกน y เท่ากัน
10. ดังนั้น จะได้ว่า $x_1 = y_2$
11. เพราะฉะนั้น $x_1 = y_2$ และ $x_2 = y_1$
12. จากสมการ

$$PA^2 + PE^2 = 2x^2 + 2x_1^2 + 2y^2 + 2y_1^2 \quad (9)$$

$$PB^2 + PF^2 = 2x^2 + 2x_1^2 + 2y^2 + 2y_1^2 \quad (10)$$

$$PC^2 + PG^2 = 2x^2 + 2x_2^2 + 2y^2 + 2y_2^2 \quad (11)$$

$$PD^2 + PH^2 = 2x^2 + 2x_2^2 + 2y^2 + 2y_2^2 \quad (12)$$

13. จะได้ $2x^2 + 2x_1^2 + 2y^2 + 2y_1^2 = 2x^2 + 2x_2^2 + 2y^2 + 2y_2^2$
14. ดังนั้น $PA^2 + PE^2 = PB^2 + PF^2 = PC^2 + PG^2 = PD^2 + PH^2$

ผลการดำเนินงาน

จากการจัดทำโครงการ เรื่อง ทฤษฎีบททางเรขาคณิตสำหรับแปดเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า (British flag theorem for regular octagon) ซึ่งมีวัตถุประสงค์เพื่อจะแสดงความสัมพันธ์ของผลบวกกำลังสองของเส้นคู่ตรงข้ามที่ลากจากจุดใดๆ ภายในรูปแปดเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า โดยใช้ทฤษฎีบทอะพอลโลเนียส และเรขาคณิตวิเคราะห์

สรุป

กำหนดให้ $ABCDEFGH$ เป็นรูปแปดเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า และ P เป็นจุดใด ๆ ที่อยู่ภายในรูปแปดเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า ซึ่งทำการพิสูจน์ด้วยการใช้ทฤษฎีบทอะพอลโลเนียส และเรขาคณิตวิเคราะห์ โดยใช้เรื่องของการหาระยะห่างระหว่างจุดสองจุด จากการพิสูจน์พบว่า $PA^2 + PE^2 = PB^2 + PF^2 = PC^2 + PG^2 = PD^2 + PH^2$ นั่นคือ ผลบวกกำลังสองของเส้นคู่ตรงข้ามที่ลากจากมุมไปยังจุดใด ๆ ภายในรูปแปดเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า มีขนาดเท่ากัน

อภิปรายผล

ในการศึกษาโครงการ เรื่อง ทฤษฎีบททางเรขาคณิตสำหรับแปดเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า โดยใช้ทฤษฎีบทอะพอลโลเนียส และเรขาคณิตวิเคราะห์ ผู้จัดทำได้สร้างรูปแปดเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าบนระบบพิกัดฉาก 2 มิติ โดยกำหนดให้ $ABCDEFGH$ เป็นรูปแปดเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าเพื่อเป็นรูปสำหรับการพิสูจน์ทฤษฎีบททางเรขาคณิตสำหรับแปดเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า โดยใช้ทฤษฎีบทอะพอลโลเนียส และเรขาคณิตวิเคราะห์ การใช้ทฤษฎีบทอะพอลโลเนียสมีการกำหนดให้ P เป็นจุดใด ๆ ที่อยู่ภายในรูปแปดเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า จากการหาความสัมพันธ์โดยใช้ทฤษฎีบทอะพอลโลเนียสพบว่า $PA^2 + PE^2 = PB^2 + PF^2 = PC^2 + PG^2 = PD^2 + PH^2$ และในการพิสูจน์ด้วยการใช้เรขาคณิตวิเคราะห์โดยการหาระยะห่างระหว่างจุดสองจุด มีการกำหนดพิกัดจุดยอดมุมของรูปแปดเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า และกำหนดให้ P เป็นจุดใด ๆ ที่อยู่ภายในรูปแปดเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า จะได้ว่า $PA^2 + PE^2 = PB^2 + PF^2$ และ $PC^2 + PG^2 = PD^2 + PH^2$ เพื่อให้สมการทั้งสองเท่ากันจึงต้องพิสูจน์ว่า $x_1 = y_2$ และ $x_2 = y_1$ โดยการสร้างรูปสี่เหลี่ยม $MNOP$ และรูปสี่เหลี่ยม $IJKL$ จะได้ $x_2 = y_1$ และสร้างรูปสี่เหลี่ยม $abcd$ และรูปสี่เหลี่ยม $efgh$ จะได้ $x_1 = y_2$ จึงสรุปได้ว่า $PA^2 + PE^2 = PB^2 + PF^2 = PC^2 + PG^2 = PD^2 + PH^2$ ดังนั้นจากการพิสูจน์ทฤษฎีบททางเรขาคณิตสำหรับแปดเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า โดยใช้ทฤษฎีบทอะพอลโลเนียส และเรขาคณิตวิเคราะห์ พบว่าผลบวกกำลังสองของเส้นคู่ตรงข้ามที่ลากจากมุมไปยังจุดใด ๆ ภายในรูปแปดเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า มีขนาดเท่ากัน

ข้อเสนอแนะ

ศึกษาการขยายทฤษฎีบทของชาตอังกฤษไปยังรูป n เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า ในกรณีทั่วไป เมื่อ n เป็นจำนวนคู่ เช่น 6, 10, 12 เหลี่ยม เป็นต้น

ศึกษาเพิ่มเติมเกี่ยวกับการนำเรขาคณิตเวกเตอร์หรือเมทริกซ์มาช่วยในการพิสูจน์เพื่อเปรียบเทียบประสิทธิภาพหรือความซับซ้อนของวิธีการพิสูจน์

สามารถต่อยอดไปสู่การพิจารณา จุด P ที่อยู่นอกรูปแปดเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า หรือขยายบริบทไปสู่รูปทรงสามมิติ (เช่น ปริซึม หรือทรงแปดหน้า)

เอกสารอ้างอิง

- [1] ราชบัณฑิตยสถาน. (2559). *พจนานุกรมศัพท์คณิตศาสตร์ ฉบับราชบัณฑิตยสภา* (พิมพ์ครั้งที่ 11). กรุงเทพฯ : สำนักงานราชบัณฑิตยสภา.
- [2] วัฒนา เถาว์ทิพย์. (2545). โครงการส่งเสริมโอลิมปิกวิชาการฯ ศูนย์ สอวน. มหาวิทยาลัยขอนแก่น [เอกสารที่ไม่มีการตีพิมพ์]. ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัย ขอนแก่น.
- [3] สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ. (2560). *หนังสือเรียน รายวิชาพื้นฐาน คณิตศาสตร์ ประถมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 2*. กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว.
- [4] สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ. (2560). *หนังสือเรียน รายวิชาพื้นฐาน คณิตศาสตร์ มัธยมศึกษาปีที่ 2 เล่ม 1*. กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว.
- [5] สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ. (2560). *หนังสือเรียน รายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ มัธยมศึกษาปีที่ 4 เล่ม 2*. กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว.
- [6] Quang Hung Tran. (2001, November). "British flag theorem for isosceles trapezia," The Mathematical Gazette. 105(45), 523 - 529.

ภาคผนวก

