

โครงการคณิตศาสตร์
เรื่อง สมบัติบางประการของรากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน

โดย

นางสาวธมลพรรณ นวลนก
นางสาวหนึ่งฤทัย นาดอน
นางสาวกัญญาภัทร เดชกมล

ครูที่ปรึกษา

นายทรงกลด พรศิริวงศ์
นางทัศนีย์ บุญญา

โรงเรียนสภาราชินี จังหวัดตรัง สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษาตรัง กระบี่

รายงานฉบับนี้เป็นส่วนประกอบของโครงการคณิตศาสตร์
ประเภททฤษฎี ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

การประกวดโครงการทางคณิตศาสตร์ สัปดาห์วิทยาศาสตร์แห่งชาติ ประจำปี 2569
คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏสุราษฎร์ธานี

โครงการคณิตศาสตร์
เรื่อง สมบัติบางประการของรากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน

โดย

นางสาวธมลพรรณ นวลนก

นางสาวหนึ่งฤทัย นาดอน

นางสาวกัญญาภัทร เดชกมล

ครูที่ปรึกษา

นายทรงกลด พรศิริวงศ์

นางทัศนีย์ บุญญา

โรงเรียนสภาราชินี จังหวัดตรัง สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษาตรัง กระบี่

รายงานฉบับนี้เป็นส่วนประกอบของโครงการคณิตศาสตร์
ประเภททฤษฎี ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

การประกวดโครงการทางคณิตศาสตร์ สัปดาห์วิทยาศาสตร์แห่งชาติ ประจำปี 2569
คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏสุราษฎร์ธานี

ชื่อโครงการ สมบัติบางประการของรากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน

ชื่อผู้จัดทำ นางสาวธมลพรรณ นวลนก
นางสาวหนึ่งฤทัย นาดอน
นางสาวกัญญาภัทร เดชกมล

ชื่อครูที่ปรึกษา นายทรงกลด พรศิริวงศ์
นางทัศนีย์ บุญญา

สถานศึกษา สภाराชนิ จังหวัดตรัง

บทคัดย่อ

โครงการเรื่อง สมบัติบางประการของรากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน มีวัตถุประสงค์เพื่อ 1) ศึกษาผลคูณของระยะทางระหว่างจุดยอดจุดหนึ่งกับจุดยอดอื่น ๆ ของรูป n เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า 2) ศึกษาผลคูณของ

กำลังสองของระยะห่างระหว่างจุดใด ๆ ไปยังจุดยอดของรูป n เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า

โดยรูปดังกล่าวเป็นรูปที่แนบในวงกลมรัศมี r และจุดยอดของรูป n เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าถูกสร้างจากรากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน w โดยทางคณะผู้จัดทำได้ดำเนินอาศัยทฤษฎีบทรากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อนมาสร้างรูป n เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่แนบในวงกลมรัศมี r หน่วย โดยให้จุดยอดของรูปเหลี่ยมนี้อาจเป็นรากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน w โดยการพิสูจน์ใช้วิธีพิจารณาจากสมการพหุนามและโดยนำมาเขียนในรูปการแยก ตัวประกอบและใช้สมบัติของค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อนในการจัดรูปสมการเพื่อหาความสัมพันธ์ที่ต้องการ

จากการดำเนินงานผู้จัดทำได้ผลการศึกษาดังต่อไปนี้

1. สามารถหาผลคูณของระยะทางระหว่างจุดยอดจุดหนึ่งกับจุดยอดอื่น ๆ ของรูป n เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า ดังนี้

$$|z_k - z_1||z_k - z_2||z_k - z_3|\dots|z_k - z_{k-1}||z_k - z_{k+1}|\dots|z_k - z_n| = nr^{n-1}$$

โดยที่ n เป็นจำนวนเหลี่ยมของรูป n ด้านเท่ามุมเท่าหรืออันดับของรากที่สนใจ และ $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$ เป็นรากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน w ซึ่งเป็นจุดยอดมุมของรูป n เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า และ r คือรัศมีของวงกลมที่ล้อมรอบรูป n เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า

2. สามารถหาผลคูณของกำลังสองของระยะห่างระหว่างจุดใด ๆ ไปยังจุดยอดของรูป n เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า ดังนี้

$$|P-z_1|^2 |P-z_2|^2 |P-z_3|^2 \dots |P-z_n|^2 = |P^n - w|^2 = R^{2n} + r^{2n} - 2R^n r^n \cos(n\theta - \phi)$$

โดยที่ $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$ เป็นรากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน w และเป็นจุดยอดมุมของรูป n เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า

P เป็นจุดใด ๆ ที่แนบอยู่ในระนาบเชิงซ้อน

R คือระยะทางจากจุดกำเนิดไปยังจุด P

r คือรัศมีของวงกลมล้อมรอบรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า

θ คือ อาร์กิวเมนต์ของจำนวนเชิงซ้อน P

ϕ คือ อาร์กิวเมนต์ของจำนวนเชิงซ้อน w

กิตติกรรมประกาศ

โครงการ เรื่อง สมบัติบางประการของรากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน ประกอบด้วยการดำเนินงานหลายขั้นตอน นับตั้งแต่การศึกษาข้อมูล การพิสูจน์ การตรวจสอบแก้ไข การจัดทำโครงการเป็นรูปเล่ม จนกระทั่งโครงการสำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี ตลอดระยะเวลาดังกล่าวคณะผู้จัดทำโครงการได้รับความช่วยเหลือและคำแนะนำในด้านต่างๆ ตลอดจนได้รับแรงบันดาลใจจากบุคคลหลายท่าน คณะผู้จัดทำตระหนักและซาบซึ้งในความกรุณาจากทุกท่านเป็นอย่างยิ่ง ณ โอกาสนี้ ขอขอบคุณทุกท่าน ดังนี้

กราบขอบคุณคุณครูทรงกลด พรศิริวงศ์ และคุณครูทัศนีย์ บุญญา คุณครูที่ปรึกษาโครงการ จากกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ โรงเรียนสมการาชินี จังหวัดตรังทุกท่าน ซึ่งได้กรุณาให้ความช่วยเหลือให้คำปรึกษาแนะนำแนวคิด วิธีการและเวลาอันมีค่าแก้ไขข้อบกพร่องของเนื้อหาโดยตลอด พร้อมทั้งเป็นกำลังใจให้เสมอมา

ท้ายที่สุดขอกราบขอบพระคุณคุณพ่อ คุณแม่ ผู้ปกครอง และขอบคุณเพื่อนๆ ที่ได้ให้คำปรึกษาในเรื่องต่างๆ เกี่ยวกับโครงการเล่มนี้

ผู้จัดทำ

สารบัญ

หน้า

บทคัดย่อ	ก
กิตติกรรมประกาศ	ค
สารบัญ	ง
สารบัญภาพ	จ
บทที่ 1 บทนำ	1
ที่มาและความสำคัญ	1
วัตถุประสงค์	2
ขอบเขตการศึกษา	2
ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ	2
เนื้อหาที่เกี่ยวข้อง	2
บทที่ 2 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	3
บทที่ 3 วิธีการดำเนินงาน	8
บทที่ 4 ผลการดำเนินงาน	10
บทที่ 5 สรุป อภิปราย และข้อเสนอแนะ	14
บรรณานุกรม	19

สารบัญภาพ

ภาพที่	หน้า
1 แสดงความสัมพันธ์ระยะทางระหว่างจุดยอดมุม A_1 ไปยังจุด M ซึ่งตั้งอยู่บนแกน x	6
2 รูป n เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่แนบในวงกลมรัศมี r และจุด P ใด ๆ	7
3 รูป n เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่แนบในวงกลมรัศมี r	11
4 รูป n เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่แนบในวงกลมรัศมีและจุด P ใดๆ	14

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ที่มาและความสำคัญ

โครงการคณิตศาสตร์เรื่อง สมบัติบางประการของรากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน ได้รับแนวคิดมาจาก โครงการคณิตศาสตร์เรื่อง การศึกษาสมบัติบางประการของรากที่ n ของ 1 ในระบบจำนวนเชิงซ้อน (ภูมิภาส ขอบชุมพล, ชลดรงค์ แก้วท่าพญา, และ ธันวา แก้วกำเนต, (2565) ซึ่งได้พิสูจน์ให้เห็นว่า สามารถสร้างรูป n เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่แนบในวงกลมรัศมี r จากจุดที่เป็นรากที่ n ของ 1 ในระบบจำนวนเชิงซ้อนได้ และได้ค้นพบว่าผลรวมของกำลังสองของระยะทางระหว่างจุด P ใดๆ ไปยังจุดยอดของรูป n เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่แนบในวงกลมรัศมี r จากจุดที่เป็นรากที่ n ของ 1 มีค่าเป็น $n(|P|^2 + r^2)$

ทางคณะผู้จัดทำเล็งเห็นว่างานวิจัยดังกล่าวมีข้อจำกัดอยู่ 2 ประการคือทฤษฎีดังกล่าวยังถูกจำกัด กรอบอยู่เพียงรากของ 1 และการพิจารณาความสัมพันธ์ยังหาได้เพียงแค่ผลรวมของระยะทางเท่านั้น ในขณะที่ปัญหาการวิเคราะห์โครงสร้างในระดับที่ซับซ้อนขึ้น มักต้องอาศัยการประเมินค่าผ่านผลคูณของ ระยะทางเป็นหลัก

จากการศึกษาทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องพบว่าทฤษฎีบทของโคตส์ ซึ่งอธิบายถึงความสัมพันธ์ของผล คูณระยะทางจากจุดใด ๆ ซึ่งอยู่บนแกนจริงไปยังจุดยอดมุมของรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่แนบใน วงกลมหนึ่งหน่วยซึ่งมีผลสำเร็จคือ $|1-x^n|$ เมื่อ x คือระยะห่างจากจุดศูนย์กลางกับจุดใด ๆ ซึ่งตั้งอยู่บน แกน X

ทางคณะผู้จัดทำจึงมีความสนใจพิจารณาถึงการหาผลคูณของระยะทางระหว่างจุดยอดจุดหนึ่ง กับจุดยอดอื่น ๆ ของรูป n เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าซึ่งสร้างมาจากรากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ และ ศึกษาผลคูณของกำลังสองของระยะห่างระหว่างจุดใด ๆ ไปยังจุดยอดของรูป n เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า ซึ่งสร้างมาจากรากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ

1.2 วัตถุประสงค์

1.2.1 เพื่อศึกษาผลคูณของระยะทางระหว่างจุดยอดมุมจุดหนึ่งกับจุดยอดมุมอื่น ๆ ของรูป n เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าซึ่งสร้างมาจากรากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ

1.2.2 เพื่อศึกษาผลคูณของกำลังสองของระยะห่างระหว่างจุดใด ๆ ไปยังจุดยอดหรือมุมของรูป n เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าซึ่งสร้างมาจากรากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ

1.3 ขอบเขตการศึกษา

ศึกษาบนระนาบเชิงซ้อน 2 มิติโดยพิจารณารูป n เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่สร้างจากรากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน w ใด ๆ ที่แนบในวงกลมรัศมี r หน่วย

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1.4.1 ได้ผลคูณของระยะทางระหว่างจุดยอดมุมจุดหนึ่งกับจุดยอดมุมอื่น ๆ ของรูป n เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า

1.4.2 ได้ผลคูณของกำลังสองของระยะห่างระหว่างจุดใด ๆ ไปยังจุดยอดหรือมุมของรูป n เหลี่ยม

1.5 เนื้อหาที่เกี่ยวข้อง

1.5.1 จำนวนเชิงซ้อน (Complex numbers)

1.5.2 ระยะทางระหว่างสองจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ

1.5.3 รูปเชิงขั้วของจำนวนเชิงซ้อน

1.5.4 ทฤษฎีบทของเดอมัวว์ (De Moivre's Theorem)

1.5.5 รากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน

1.5.6 สมบัติของรากที่ n ในระบบจำนวนเชิงซ้อน

1.5.7 กฎของคูลอมบ์ (Coulomb's Law)

1.5.8 กฎของเกาส์ (Gauss's law)

1.5.9 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

บทที่ 2

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

โครงงานเรื่อง สมบัติบางประการของรากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน ทางคณะผู้จัดทำได้
ทำการศึกษาและค้นคว้าเอกสารที่เกี่ยวข้อง โดยมีรายละเอียดตามลำดับดังนี้

- 2.1 จำนวนเชิงซ้อน (Complex numbers)
- 2.2 ระยะทางระหว่างสองจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ
- 2.3 รูปเชิงขั้วของจำนวนเชิงซ้อน
- 2.4 ทฤษฎีบทของเดอมัวร์ (De Moivre's Theorem)
- 2.5 รากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน
- 2.6 สมบัติของรากที่ n ในระบบจำนวนเชิงซ้อน
- 2.7 กฎของคูลอมบ์ (Coulomb's Law)
- 2.8 กฎของเกาส์ (Gauss's law)
- 2.9 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1 จำนวนเชิงซ้อน (Complex numbers)

2.1.1 บทนิยามของจำนวนเชิงซ้อน

(สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี [สสวท.] . 2562 : 3–5)

บทนิยาม จำนวนเชิงซ้อน คือ คู่อันดับ (a,b) เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง

และกำหนดการเท่ากัน การบวก และการคูณของจำนวนเชิงซ้อน ดังนี้

สำหรับจำนวนเชิงซ้อน (a,b) และ (c,d)

1. การเท่ากัน $(a,b) = (c,d)$ ก็ต่อเมื่อ $a = c$ และ $b = d$

2. การบวก $(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$

3. การคูณ $(a,b) \cdot (c,d) = (ac-bd, ad+bc)$

อาจแทน $(a,b) \cdot (c,d)$ ด้วย $(a,b)(c,d)$ ก็ได้

2.2 ระยะทางระหว่างสองจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ

(สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี [สสวท.] . 2562 : 6)

กำหนดให้ $z_1 = a_1 + b_1i$ และ $z_2 = a_2 + b_2i$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน

จะได้ว่า $(a_1 + b_1i)$ และ $(a_2 + b_2i)$ เป็นจุดในระนาบเชิงซ้อน

ให้ P_1 มีพิกัดเป็น (a_1, b_1) และ มีพิกัดเป็น P_2 มีพิกัดเป็น (a_2, b_2)

ดังนั้น ระยะทางระหว่างจุด $P_1(a_1, b_1)$ และ $P_2(a_2, b_2)$ คือ

$$\begin{aligned} P_1P_2 &= \sqrt{(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2} \\ &= |(a_2 - a_1) + (b_2 - b_1)i| \\ &= |(a_2 + b_2i) - (a_1 + b_1i)| \\ &= |z_2 - z_1| \end{aligned}$$

จะได้ว่าระยะทางระหว่างจำนวนเชิงซ้อน z_1 และ z_2 คือ $|z_2 - z_1|$

2.3 รูปเชิงขั้วของจำนวนเชิงซ้อน

(สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี [สสวท.] . 2562 : 6 -7)

บทนิยาม ให้จำนวนเชิงซ้อน w เขียนอยู่ในรูป $w = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$

เรียกว่าจำนวนเชิงซ้อนรูปแบบเชิงขั้วโดยที่ ρ คือ ค่าสัมบูรณ์ หรือ มอดุลัสของ w

และเรียก θ เรียกว่า อาร์กิวเมนต์ ของ w เขียนแทนด้วย $\theta = \arg(w)$

2.4 ทฤษฎีบทของเดอมัวร์ (De Moivre's Theorem)

(สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี [สสวท.] . 2562 : 37 - 45)

ทฤษฎีบท ถ้า $z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว

และ n เป็นจำนวนเต็มบวก แล้ว $z^n = \rho^n [\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)]$

2.5 รากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน

บทนิยาม ให้ w เป็นจำนวนเชิงซ้อน และ n เป็นจำนวนเต็มบวก

รากที่ n ของ w คือจำนวนเชิงซ้อน z ซึ่ง $z^n = w$

ทฤษฎีบท ถ้า $w = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$ และ $n \geq 1$ แล้วรากที่ n ของ w

มีได้ทั้งหมด n ค่าที่แตกต่างกันคือ

$$z_{k+1} = \sqrt[n]{\rho} \left[\cos \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \right]$$

เมื่อ $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$

2.6 สมบัติของรากที่ n ในระบบจำนวนเชิงซ้อน

(สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี [สสวท.] . 2562 : 47 - 51)

ถ้า $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$ เป็นรากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน z แล้ว

1. รากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ จะมี n รากที่แตกต่างกัน
2. $|z_1| = |z_2| = |z_3| = \dots = |z_n| = \sqrt[n]{|z|}$
3. $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$ อยู่บนวงกลมที่มีรัศมี $\sqrt[n]{|z|}$ และแบ่งวงกลมออกเป็น n ส่วน เท่า ๆ กัน

2.7 กฎของคูลอมบ์ (Coulomb's Law)

(Murdock. 2008 : 3)

กฎของคูลอมบ์ ให้ค่าแรงดึงดูดหรือแรงผลักระหว่างจุดประจุสองจุด หากจุดประจุ q_1 และ q_2 สองจุดอยู่ห่างกันเป็นระยะทาง r ขนาดของแรงผลักหรือแรงดึงดูดระหว่างประจุทั้งสองคือ

$$F = k \frac{|q_1||q_2|}{r^2}$$

$$\text{โดยที่ } k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}, \quad \epsilon_0 = 8.85419 \times 10^{-12} \frac{C^2}{N \cdot m^2}$$

2.8 กฎของเกาส์ ในรูปแบบอินทิกรัล (Gauss' Law , Integral Form)

(Griffiths. 2013 : 69)

กฎของเกาส์ อินทิกรัลพื้นที่ของสนามไฟฟ้าบนพื้นผิวปิดใด ๆ จะมีค่าเท่ากับ ประจุสุทธิที่อยู่ภายในพื้นที่ผิว (Q_{enc})หารด้วยสภาพยอมของอวกาศ

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

โดยที่

$\vec{E}$ คือ เวกเตอร์สนามไฟฟ้าที่พุ่งออกจากพื้นที่ปิด

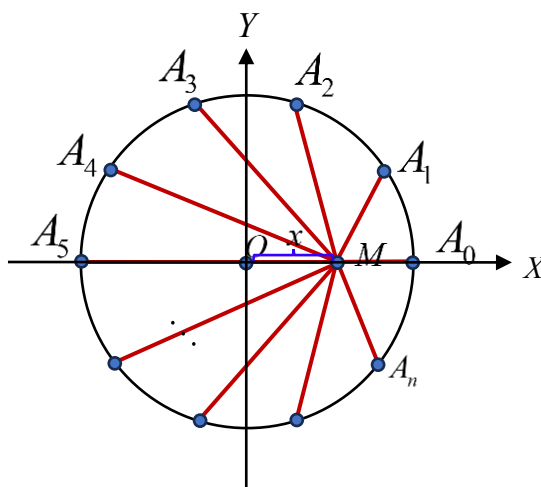
$d\vec{A}$ คือ เวกเตอร์ของพื้นที่ย่อยบนผิวพื้นที่นั้น

2.9 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.9.1 ทฤษฎีบทของโคตส์ (Cotes' Theorem)

(Cotes, 1722, as cited in O'Connor & Robertson, n.d.)

ทฤษฎีบทของโคตส์อธิบายถึงความสัมพันธ์ของผลคูณระยะทางจากจุดใด ๆ ไปยังจุดยอดมุมของรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่แนบในวงกลม



ภาพที่ 1 แสดงความสัมพันธ์ระยะทางระหว่างจุดยอดมุม A_1 ไปยังจุด M ซึ่งตั้งอยู่บนแกน x

ทฤษฎีบท กำหนดให้มีจุด n จุดที่มีระยะห่างเท่าๆ กันบนเส้นรอบวงของวงกลมหนึ่งหน่วย และมีจุด M ซึ่งตั้งอยู่บนแกน X โดยมีระยะห่าง x จากจุดศูนย์กลาง O

ของวงกลม และอยู่บนเส้นตรงที่ลากผ่านจุดแรก A_0 บนวงกลม จะได้ว่าผลคูณของระยะทางจากจุด n จุดบนวงกลมไปยังจุด M จะมีความสัมพันธ์ดังนี้

$$(MA_1) \cdot (MA_2) \cdot (MA_3) \cdot \dots \cdot (MA_n) = |1 - x^n|$$

2.9.2 ภูมิภาส ขอบซุผล และคณะ (2565)

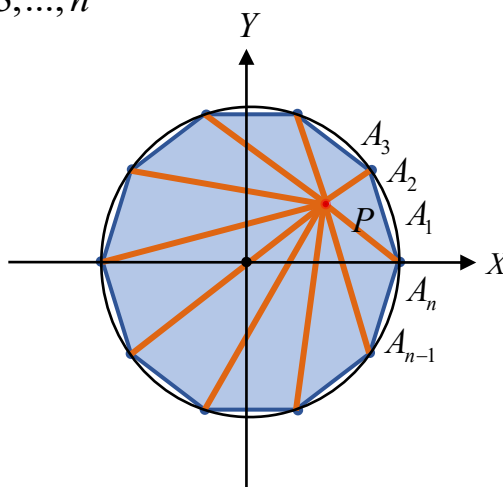
โครงการคณิตศาสตร์เรื่อง การศึกษาสมบัติบางประการของรากที่ n ของ 1 ในระบบจำนวนเชิงซ้อน โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาสมบัติบางประการของรากที่ n ของ 1 ในระบบจำนวนเชิงซ้อน

จากการศึกษาพบว่าสามารถสร้างรูป n เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่แนบในวงกลมรัศมี r จากจุดที่เป็นรากที่ n ของ 1 ได้

นอกจากนี้โครงการดังกล่าวยังได้ทำการหาผลรวมของกำลังสองของระยะห่างระหว่างจุดใด ๆ ไปยังจุดยอดหรือมุมของรูป n เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่แนบในวงกลมรัศมี r ซึ่งได้ข้อสรุปออกมา เป็นสมการความสัมพันธ์ดังนี้

$$(PA_1)^2 + (PA_2)^2 + (PA_3)^2 + \dots + (PA_n)^2 = n(|P|^2 + r^2)$$

โดยที่ P เป็นจุดใด ๆ และ A_i เป็นจุดยอดมุมของรูป n เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่แนบในวงกลมรัศมี r เมื่อ $i = 1, 2, 3, \dots, n$



ภาพที่ 2 รูป n เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่แนบในวงกลมรัศมี r และจุด P ใด ๆ

บทที่ 3

วิธีการดำเนินงาน

โครงการเรื่อง สมบัติบางประการของรากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน ผู้จัดทำได้ดำเนินงานดังหัวข้อต่อไปนี้

3.1 ขั้นตอนการดำเนินโครงการ

3.1.1 ศึกษาความรู้เรื่องรูปเชิงขั้วของจำนวนเชิงซ้อน รากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน และสมบัติของรากที่ n ในระบบจำนวนเชิงซ้อน

3.1.2 ศึกษาเรื่องทฤษฎีบทรากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อนโดยทั่วไปแล้วจะสามารถหารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อนโดยใช้รูปแบบเชิงขั้วผ่านทฤษฎีบทคือ ถ้า $w = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$ แล้วรากที่ n ของ w จะมีทั้งหมด n รากที่แตกต่างกันนั่นคือ $z_{k+1} = \sqrt[n]{\rho} \left[\cos \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \right]$ เมื่อ $k \in \{0, 1, 2, 3, \dots, n-1\}$ และเรียก $\frac{\theta + 2k\pi}{n}$ ว่าอาร์กิวเมนต์ของรากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน

3.1.3 จากนั้นใช้เอกลักษณ์ทางพีชคณิต สมบัติของค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน ทฤษฎีบทของเดอมัวร์ และกฎของโคไซน์ในการหาค่า

$$1) |z_1 - z_2| |z_1 - z_3|$$

$$2) |P - z_1|^2 |P - z_2|^2 |P - z_3|^2$$

3.1.4 หาผลสำเร็จกรณีเฉพาะของรากที่ 4 , 5 และรากอื่น ๆ เพื่อหารูปแบบโดยทำซ้ำขั้นตอนที่ 3.1.2 และ 3.1.3

3.1.5 หาสูตรสำเร็จในรูปทั่วไป

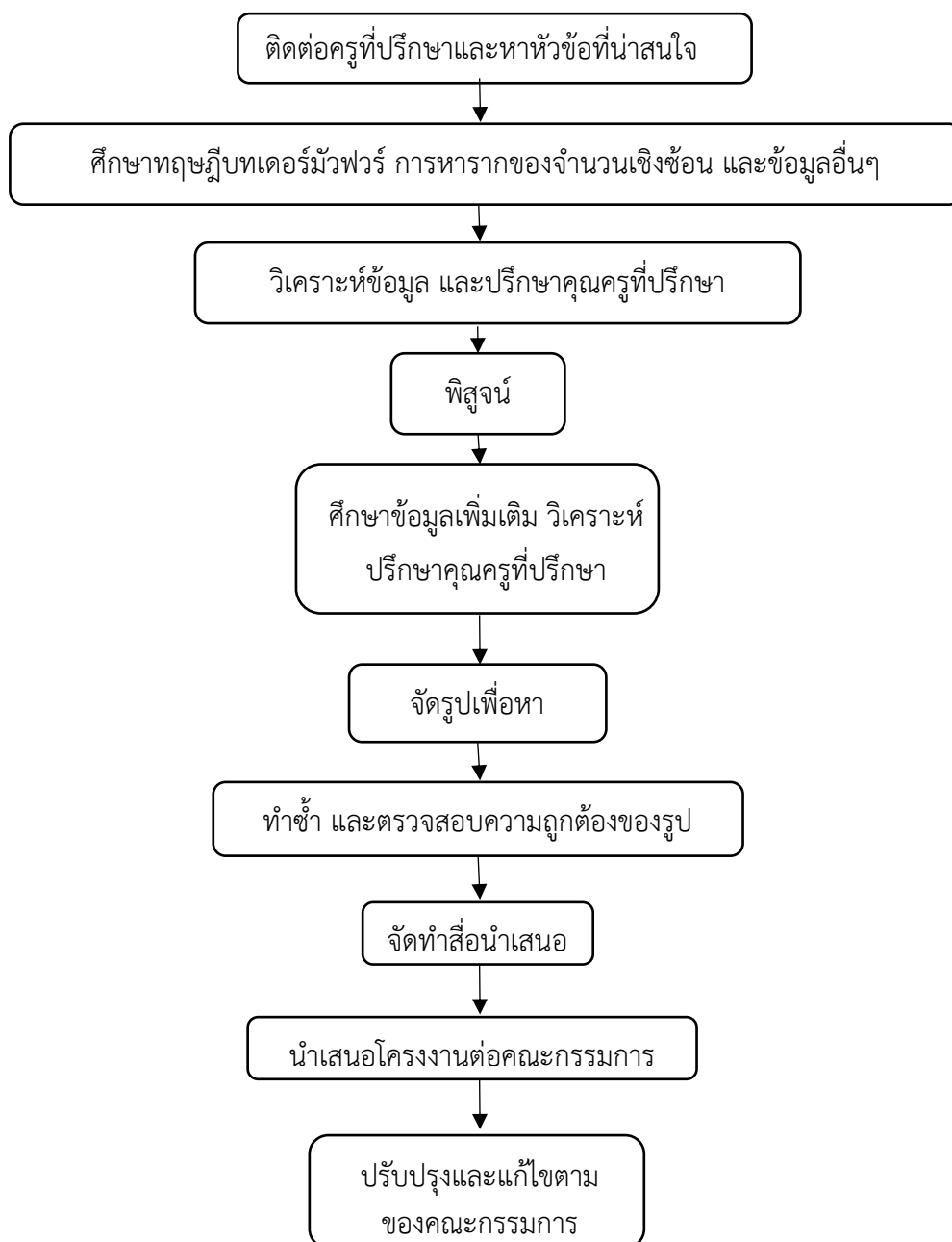
3.1.6 นำผลการพิสูจน์ที่ได้ปรึกษากับครูที่ปรึกษาเพื่อดูความถูกต้องและปรับปรุงแก้ไข

3.1.7 สร้างบทพิสูจน์อย่างง่ายของการหาผลคูณของระยะทางระหว่างจุดยอดมุมจุดหนึ่งกับจุดยอดมุมอื่น ๆ ของรูป n เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า และการหาผลคูณของกำลังสองของระยะทางระหว่างจุดใด ๆ ไปยังจุดยอดหรือมุมของรูป n เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า

3.1.8 นำเสนอแก่อาจารย์ที่ปรึกษา เพื่อปรับปรุงและแก้ไขให้สมบูรณ์

3.1.9 จัดทำรูปเล่มรายงาน पोสเตอร์ และสไลด์นำเสนอเรื่องสมบัติบางประการของรากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน

3.2 แผนผังการดำเนินการศึกษาโครงการ



บทที่ 4

ผลการดำเนินงาน

จากการดำเนินการศึกษาโครงการ เรื่อง สมบัติบางประการของรากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน มีผลการดำเนินงานตามวัตถุประสงค์ดังนี้

การพิสูจน์ในกรณีทั่วไป

4.1 เพื่อหาผลคูณของระยะทางระหว่างจุดยอดมุมจุดหนึ่งกับจุดยอดมุมจุดอื่น ๆ

ของรูป n เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า

ทฤษฎีบท ผลคูณระหว่างจุดยอดจุดหนึ่งกับจุดยอดจุดอื่น ๆ ของรูปเหลี่ยมนด้านเท่ามุมเท่า n

$$\text{คือ } |z_k - z_1| \dots |z_k - z_{k-1}| |z_k - z_{k+1}| \dots |z_k - z_n| = nr^{n-1}$$

เมื่อ n เป็นจำนวนเหลี่ยมของรูป n ด้านเท่ามุมเท่าหรืออันดับของรากที่สนใจ และ $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$ เป็นรากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน w ซึ่งเป็นจุดยอดมุมของรูป n เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า และ r คือรัศมีของวงกลมที่ล้อมรอบรูป n เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า

พิสูจน์ กำหนดให้ z เป็นรากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน w โดยทฤษฎีบทข้างต้นจะได้ว่า

รากที่ n ของ w จะประกอบด้วย $z_1, z_2, z_3, \dots, z_{k-1}, z_k, z_{k+1}, \dots, z_{n-1}, z_n$ โดยแต่ละค่าจะแตกต่างกันทั้งหมด และจาก z เป็นรากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน w ดังนั้น

$$\begin{aligned} z^n &= w \\ z^n - w &= 0 \end{aligned} \quad (I)$$

นั่นคือ $z_1, z_2, z_3, \dots, z_{k-1}, z_k, z_{k+1}, \dots, z_{n-1}, z_n$ เป็นคำตอบสมการ (I)

จาก z_k เป็นรากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน w จะได้ว่า $z_k^n = w$ ดังนั้นสามารถเขียน (I) ได้เป็น

$$z^n - z_k^n = 0 \quad (II)$$

โดยเอกลักษณ์ทางพีชคณิต

สามารถจัดรูป (II) ได้เป็น

$$(z - z_k)(z^{n-1} + z^{n-2}z_k + z^{n-3}z_k^2 + \dots + z z_k^{n-2} + z_k^{n-1}) = 0 \quad (III)$$

เนื่องจาก $z_1, z_2, z_3, \dots, z_{k-1}, z_k, z_{k+1}, \dots, z_{n-1}, z_n$ เป็นคำตอบสมการ (I) จะได้ว่า

$$(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) \dots (z - z_{k-1})(z - z_k)(z - z_{k+1}) \dots (z - z_n) = 0 \quad (IV)$$

จาก (III) และ (IV) จะได้

$$\begin{aligned} (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) \dots (z - z_{k-1})(z - z_{k+1}) \dots (z - z_n) \\ = (z^{n-1} + z^{n-2}z_k + z^{n-3}z_k^2 + \dots + z z_k^{n-2} + z_k^{n-1}) \end{aligned}$$

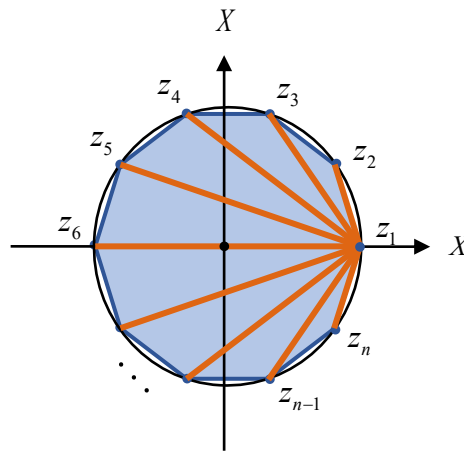
หากแทน $z = z_k$ จะได้

$$\begin{aligned} (z_k - z_1)(z_k - z_2)(z_k - z_3) \dots (z_k - z_{k-1})(z_k - z_{k+1}) \dots (z_k - z_n) \\ = (z_k^{n-1} + z_k^{n-2}z_k + z_k^{n-3}z_k^2 + \dots + z_k z_k^{n-2} + z_k^{n-1}) \\ = (z_k^{n-1} + z_k^{n-1} + \dots + z_k^{n-1}) \\ = n z_k^{n-1} \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } (z_k - z_1) \dots (z_k - z_{k-1})(z_k - z_{k+1}) \dots (z_k - z_n) = n z_k^{n-1}$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ว่า } |(z_k - z_1) \dots (z_k - z_{k-1})(z_k - z_{k+1}) \dots (z_k - z_n)| &= |n z_k^{n-1}| \\ |(z_k - z_1) \dots (z_k - z_{k-1})(z_k - z_{k+1}) \dots (z_k - z_n)| &= |n z_k^{n-1}| \\ |z_k - z_1| \dots |z_k - z_{k-1}| |z_k - z_{k+1}| \dots |z_k - z_n| &= n |z_k^{n-1}| \\ |z_k - z_1| \dots |z_k - z_{k-1}| |z_k - z_{k+1}| \dots |z_k - z_n| &= n \left(\sqrt[n]{w} \right)^{n-1} \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } |z_k - z_1| \dots |z_k - z_{k-1}| |z_k - z_{k+1}| \dots |z_k - z_n| = n r^{n-1}$$



ภาพที่ 3 รูป n เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่แนบในวงกลมรัศมี r

4.2 เพื่อหาผลคูณของกำลังสองของระยะทางระหว่างจุดใด ๆ บนระนาบเชิงซ้อนไปยังจุดยอดมุมของรูป n เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า

ทฤษฎีบท ผลคูณของกำลังสองของระยะทางระหว่างจุดใด ๆ ไปยังจุดยอดของรูป n เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าคือ

$$|P - z_1|^2 |P - z_2|^2 |P - z_3|^2 \dots |P - z_n|^2 = |P^n - w|^2 = R^{2n} + r^{2n} - 2R^n r^n \cos(n\theta - \phi)$$

โดยที่ n เป็นจำนวนเหลี่ยมของรูป n ด้านเท่ามุมเท่าหรืออันดับของรากที่สนใจ

w เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่สนใจศึกษา

$z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$ เป็นรากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน w ซึ่งเป็นจุดยอดมุมของรูป n เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า

P เป็นจุดใด ๆ ที่แนบอยู่ในระนาบเชิงซ้อน

R คือระยะทางจากจุดกำเนิดไปยังจุด P

r คือรัศมีของวงกลมล้อมรอบรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า

θ คือ อาร์กิวเมนต์ของจำนวนเชิงซ้อน P

ϕ คือ อาร์กิวเมนต์ของจำนวนเชิงซ้อน w

พิสูจน์ กำหนดให้ z เป็นรากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน w โดยทฤษฎีบทรากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อนจะได้รากที่ n ของ w จะประกอบด้วย $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$ โดยแต่ละค่าจะแตกต่างกันทั้งหมด กำหนดให้ $A_1 = z_1, A_2 = z_2, A_3 = z_3, \dots, A_n = z_n$ จะสามารถสร้างรูป n เหลี่ยม $A_1 A_2 A_3 \dots A_n$ ซึ่งเป็นรูป n เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่แนบในวงกลมรัศมี r หน่วย

เมื่อ $r = \sqrt[n]{|w|}$ กำหนดให้ P เป็นจุดใด ๆ ในระนาบเชิงซ้อน และ PA_i คือระยะทางระหว่างจุด P และ A_i จะได้ว่า $PA_i = |P - z_i|$ เมื่อ $i = 1, 2, 3, \dots, n$

จากสมการ (I) จะสามารถเขียนพหุนามดังกล่าวในรูปตัวประกอบได้ดังนี้

$$z^n - w = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) \dots (z - z_n) \quad (V)$$

จะสามารถเขียนผลคูณของกำลังสองของระยะทางระหว่างจุด P ไปยังจุดยอดมุมแต่ละจุดบนรูป n เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า ได้ดังนี้

$$|P - z_1|^2 |P - z_2|^2 |P - z_3|^2 \dots |P - z_n|^2$$

โดยสมบัติของค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} |P-z_1|^2 |P-z_2|^2 |P-z_3|^2 \dots |P-z_n|^2 &= (|P-z_1| |P-z_2| |P-z_3| \dots |P-z_n|)^2 \\ &= \left(|(P-z_1)(P-z_2)(P-z_3) \dots (P-z_n)| \right)^2 \end{aligned}$$

จากสมการ (V)

$$(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3) \dots (z-z_n) = (z^n - w)$$

$$|(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3) \dots (z-z_n)|^2 = |z^n - w|^2$$

$$|z-z_1|^2 |z-z_2|^2 |z-z_3|^2 \dots |z-z_n|^2 = |z^n - w|^2 \quad (VI)$$

แทน z ด้วย P ใน (VI) จะได้

$$|P-z_1|^2 |P-z_2|^2 |P-z_3|^2 \dots |P-z_n|^2 = |P^n - w|^2$$

$$\text{ดังนั้น } |P-z_1|^2 |P-z_2|^2 |P-z_3|^2 \dots |P-z_n|^2 = |P^n - w|^2$$

จาก $P = R(\cos \theta + i \sin \theta)$ โดยทฤษฎีบทของเดอมัวร์จะได้

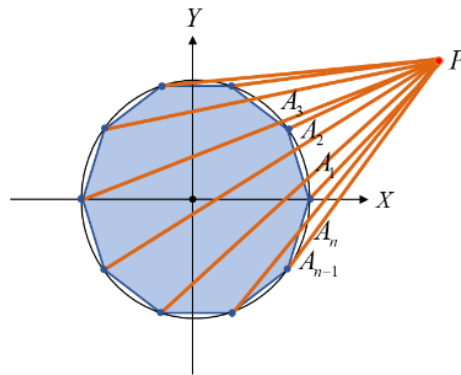
$$P^n = R^n (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)) \text{ และ}$$

$$w = r^n (\cos \phi + i \sin \phi)$$

$$\text{ดังนั้น } |P^n - w|^2 = |P^n|^2 + |w|^2 - 2|P^n||w|\cos(n\theta - \phi)$$

$$\text{จะได้ } |P^n - w|^2 = (R^n)^2 + (r^n)^2 - 2R^n r^n \cos(n\theta - \phi)$$

$$\text{ดังนั้น } |P^n - w|^2 = R^{2n} + r^{2n} - 2R^n r^n \cos(n\theta - \phi)$$



ภาพที่ 4 รูป n เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่แนบในวงกลมรัศมี r และจุด P ใด ๆ

บทที่ 5

สรุป อภิปราย และข้อเสนอแนะ

จากการดำเนินการทำโครงการ เรื่องสมบัติบางประการของรากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน โดยผู้จัดทำได้ดำเนินการจนได้ผลตามต้องการ ผู้จัดทำได้สรุปการศึกษาโครงการ อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ ดังต่อไปนี้

5.1 สรุปผลการศึกษา

โครงการเรื่อง สมบัติบางประการของรากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาสมบัติบางประการของรากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน ดังนี้

5.1.1 ศึกษาผลคูณของระยะทางระหว่างจุดยอดจุดหนึ่งกับจุดยอดอื่น ๆ ของรูป n เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า

5.1.2 ศึกษาผลคูณของกำลังสองของระยะห่างระหว่างจุดใด ๆ ไปยังจุดยอดของรูป n เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า

โดยอาศัยความรู้เรื่องค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน รากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน และสมบัติของรากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน การดำเนินงานผู้จัดทำได้ผลการศึกษาดังต่อไปนี้

5.1.3 สามารถหาผลคูณของระยะทางระหว่างจุดยอดจุดหนึ่งกับจุดยอดอื่น ๆ ของรูป n เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า ดังนี้

$$|z_k - z_1| |z_k - z_2| |z_k - z_3| \dots |z_k - z_{k-1}| |z_k - z_{k+1}| \dots |z_k - z_n| = nr^{n-1}$$

โดยที่ n เป็นจำนวนเหลี่ยมของรูป n ด้านเท่ามุมเท่าหรืออันดับของรากที่สนใจ และ $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$ เป็นรากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน w ซึ่งเป็นจุดยอดมุมของรูป n เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า และ r คือรัศมีของวงกลมที่ล้อมรอบรูป n เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า

5.1.4 สามารถหาผลคูณของกำลังสองของระยะห่างระหว่างจุดใด ๆ ไปยังจุดยอดของรูป n เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า

$$|P - z_1|^2 |P - z_2|^2 |P - z_3|^2 \dots |P - z_n|^2 = |P^n - w|^2$$

ซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในรูปเชิงขั้ว ดังนี้

$$|P^n - w|^2 = R^{2n} + r^{2n} - 2R^n r^n \cos(n\theta - \phi)$$

โดยที่ n เป็นจำนวนเหลี่ยมของรูป n ด้านเท่ามุมเท่าหรืออันดับของรากที่สนใจ

w เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่สนใจศึกษา

$z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$ เป็นรากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน w ซึ่งเป็นจุดยอดมุมของรูป n เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า

P เป็นจุดใด ๆ ที่แนบอยู่ในระนาบเชิงซ้อน

R คือระยะทางจากจุดกำเนิดไปยังจุด P

r คือรัศมีของวงกลมล้อมรอบรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า

θ คือ อาร์กิวเมนต์ของจำนวนเชิงซ้อน P

ϕ คือ อาร์กิวเมนต์ของจำนวนเชิงซ้อน w

5.2 อภิปรายผล

จากการศึกษาและพิสูจน์สมบัติของรากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน เพื่อหาผลคูณของกำลังสองของระยะทางจากจุด P ใด ๆ บนระนาบเชิงซ้อนไปยังจุดยอดของรูป n เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า คณะผู้จัดทำสามารถอภิปรายผลการค้นพบและนัยสำคัญทางวิชาการได้ดังนี้

5.2.1 ความสอดคล้องกับทฤษฎีบทที่สำคัญทางประวัติศาสตร์คณิตศาสตร์

ผลลัพธ์จากการพิสูจน์สมการ $\prod_{k=1}^n |P - z_k|^2 = |P^n - w|^2$ ในโครงงานนี้มีรูปแบบทางคณิตศาสตร์ที่ไปพ้องกับทฤษฎีบทของโคตส์ซึ่งค้นพบโดย โรเจอร์ โคตส์ในปี ค.ศ. 1722 โดยในอดีตทฤษฎีบทดังกล่าวถูกริเริ่มขึ้นเพื่อประโยชน์ในการแยกตัวประกอบของพหุนามสำหรับการหาค่าปริพันธ์

5.2.2 การตีความและการประยุกต์ใช้ในทฤษฎีศักย์ไฟฟ้า 2 มิติ

เมื่อนำสมบัติลอการิทึมมาประยุกต์ใช้ร่วมกับผลคูณของระยะทาง จะพบความเชื่อมโยงที่สามารถอธิบายพฤติกรรมทางทฤษฎีแม่เหล็กไฟฟ้าได้อย่างแม่นยำ ในฟิสิกส์ของศักย์ไฟฟ้า 2 มิติ กรณีที่มีกลุ่มประจุไฟฟ้าเชิงเส้น จัดเรียงตัวเป็นรูป n เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า ศักย์ไฟฟ้าที่จุด P ใด ๆ จะมีค่าแปรผันตาม $-\ln|P - z_k|$ ซึ่งเป็นผลเฉลยของสมการลาปลาซ ดังนั้น เมื่อแทนที่ด้วยทฤษฎีบทในโครงงาน ผลรวมของศักย์ไฟฟ้าจากกลุ่มประจุจึงสามารถเขียนลดรูปได้

อย่างงดงามเป็นฟังก์ชัน $V(P) \propto -\ln|P^n - w|$ ฟังก์ชันฮาร์มอนิกที่ได้นี้สามารถใช้อธิบายและจำลองเส้นชั้นสมศักย์ของระบบประจุที่ซับซ้อนได้อย่างถูกต้อง

5.3 ข้อเสนอแนะ

ผู้สนใจสามารถศึกษาเพิ่มเติมในปริภูมิ 3 มิติ โดยขยายขอบเขตจากการศึกษารูป n เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่แนบในวงกลม ไปสู่การศึกษาระยะทางระหว่างจุดยอดของรูปทรงเรขาคณิต 3 มิติที่แนบในทรงกลม

5.4 ตัวอย่างการนำไปใช้

ตัวอย่าง ต้องการหาค่าศักย์ไฟฟ้าของเส้นประจุยาวอนันต์ n เส้น ที่วางเรียงตัวกันเป็นรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า

วิธีทำ พิจารณาศักย์ไฟฟ้าของเส้นประจุยาวอนันต์เส้นเดียวที่มีความหนาแน่นประจุ λ วางตัวตั้งฉากกับระนาบเชิงซ้อน โดยที่เส้นประจุยาวอนันต์ ขนานกันทุกเส้น และ λ เท่ากันทุกเส้น

5.4.1 หาสนามไฟฟ้า E โดยใช้กฎของเกาส์

สร้างผิวเกาส์เขียนรูปทรงกระบอกรัศมี s ยาว l ล้อมรอบเส้นประจุ

จะได้
$$\oint E \cdot dA = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0}$$

เนื่องจากความสมมาตร สนามไฟฟ้ามีทิศพุ่งออกในแนวรัศมีสม่ำเสมอ

จะได้
$$E(2\pi sl) = \frac{\lambda l}{\epsilon_0}$$

ดังนั้น
$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 s}$$

5.4.2 หาความต่างศักย์ไฟฟ้า

จากนิยามศักย์ไฟฟ้า $V(s) = -\int E \cdot dx$ โดยกำหนดจุดอ้างอิงที่ระยะ s_0 ซึ่ง $V(s_0) = 0$

$$\begin{aligned} \text{จาก} \quad V(s) &= -\int_{s_0}^s \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} dR \\ V(s) &= -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln|R|_{s_0}^s \\ \text{ดังนั้น} \quad V(s) &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left|\frac{s_0}{s}\right| \end{aligned}$$

5.4.3 การหาศักย์ไฟฟ้ารวมของกลุ่มประจุที่วางตัวตามรากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน กำหนดให้มีเส้นประจุ n เส้นแต่ละเส้นมีความหนาแน่น λ เท่ากัน

วางตัวอยู่ที่ตำแหน่ง z_k ซึ่งเป็นรากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน $w = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ จากหลักการซ้อนทับ จะได้ศักย์ไฟฟ้าที่จุด P ใด ๆ บนระนาบเชิงซ้อนคือผลรวมสเกลาร์ของศักย์จากแต่ละเส้น นั่นคือ

$$\begin{aligned} V_{total} &= \sum_{k=1}^n V_k \\ \text{จะได้} \quad V_{total} &= \sum_{k=1}^n \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left|\frac{s_0}{P - z_k}\right| \end{aligned}$$

โดยที่ $|P - z_k|$ คือระยะห่างระหว่างจุด P กับประจุเส้นที่ k จากสมบัติของลอการิทึม

$$\text{จะได้} \quad V_{total} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left|\frac{s_0^n}{\prod_{k=1}^n |P - z_k|}\right|$$

$$\text{จากผลลัพธ์ของโครงการนซึ่งคือ} \quad \prod_{k=1}^n |P - z_k| = |P^n - w|$$

จากสมบัติของลอการิทึม

จะได้
$$V_{total} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{s_0^n}{|P^n - w|}$$

ดังนั้น สามารถหาค่าศักย์ไฟฟ้าของเส้นประจุยาวอนันต์เส้นเดียวที่มีความหนาแน่นประจุ λ วางตัว ตั้งฉากกับระนาบเชิงซ้อน โดยที่เส้นประจุยาวอนันต์ ขนานกันทุกเส้น และ λ เท่ากันเส้น จาก

$$V_{total} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{s_0^n}{|P^n - w|}$$

บรรณานุกรม

- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2562). หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 2 ตามผลการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้ คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551. กรุงเทพฯ: ศูนย์หนังสือแห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- ภูมิภาส ขอบชุมพล, ชลตรงค์ แก้วท่าพญา, และ ธันวา แก้วกำเนิด. (2565). *การศึกษาสมบัติบางประการของรากที่ n ของ 1 ในระบบจำนวนเชิงซ้อน* [โครงการ คณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย]. โรงเรียนสภาราชินี จังหวัดตรัง.
- Griffiths, D. J. (2013). *Introduction to electrodynamics* (4th ed.). Pearson.
- Murdock, D. P. (2008). Chapter 1: Electric charge; Coulomb's law. In *Worked examples from introductory physics Vol. IV: Electric fields*. Tennessee Technological University. <https://www2.tntech.edu/leap/murdock/books/v4/chap1.pdf>
- O'Connor, J. J., & Robertson, E. F. (n.d.). *Roger Cotes*. MacTutor History of Mathematics Archive, University of St Andrews. <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Cotes/>