

โครงการคณิตศาสตร์

เรื่อง การพิสูจน์สูตรหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ ที่แนบในวงกลม

จัดทำโดย

เด็กหญิงชุติกาญจน์ ดอกบัว

เด็กหญิงแทนธนิชา มณีจันทร์

เด็กหญิงปราณปรียา จันทร์แก้ว

คุณครูที่ปรึกษา

คุณครูธันวาท สิทธิพันธุ์

คุณครูศุภิสรา ไกรสิทธิ์

โรงเรียนเบญจมราชูทิศ สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษา นครศรีธรรมราช

รายงานฉบับนี้เป็นส่วนประกอบหนึ่งของโครงการคณิตศาสตร์

การแข่งขันโครงการประเพณีทฤษฎี ระดับมัธยมศึกษา ช่วงชั้นที่ ๓

เนื่องในงานสัปดาห์วิทยาศาสตร์แห่งชาติส่วนภูมิภาค ประจำปี พ.ศ.๒๕๖๙

โครงการคณิตศาสตร์

เรื่อง การพิสูจน์สูตรหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ ที่แนบในวงกลม

จัดทำโดย

เด็กหญิงชุตติกาญจน์ ดอกบัว

เด็กหญิงแทนธินา มณีจันทร์

เด็กหญิงปราณปรียา จันทร์แก้ว

คุณครูที่ปรึกษา

นางสาวธันวาทิ สิริพันธ์

นางสาวศุภิสรา ไกรสิทธิ์

โรงเรียนเบญจมราชูทิศ สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษา นครศรีธรรมราช

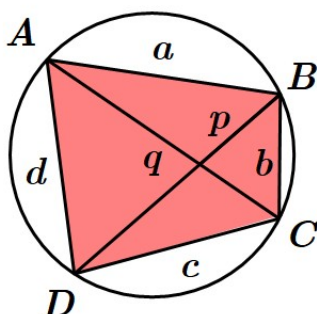
รายงานฉบับนี้เป็นส่วนประกอบหนึ่งของโครงการคณิตศาสตร์

การแข่งขันโครงการประเพณีทฤษฎี ระดับมัธยมศึกษา ช่วงชั้นที่ ๓

เนื่องในงานสัปดาห์วิทยาศาสตร์แห่งชาติส่วนภูมิภาค ประจำปี พ.ศ.๒๕๖๙

ชื่อโครงการ	การพิสูจน์สูตรหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ ที่แนบในวงกลม
ชื่อผู้ทำโครงการ	เด็กหญิงชุตติกาญจน์ ดอกบัว เด็กหญิงแทนนิชา มณีจันทร์ เด็กหญิงปราณปรียา จันทรแก้ว
ชื่อคุณครูที่ปรึกษา	นางสาวธันวาทิ สิทธิพันธุ์ นางสาวศุภิสรา ไกรสิทธิ์
สังกัด	สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษา มัธยมศึกษา
ชื่อโรงเรียน	โรงเรียนเบญจมราชูทิศ
ปีการศึกษา	2569

บทคัดย่อ



โครงการนี้แสดงถึงการพิสูจน์การหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ ที่แนบในวงกลม โดยใช้ความรู้เรื่อง รูปสามเหลี่ยมคล้าย ทฤษฎีบทวงกลม ความสัมพันธ์ของรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ ที่แนบในวงกลม กฎของโคไซน์ และอัตราส่วนตรีโกณมิติ โดยที่ k คือ พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ ที่แนบในวงกลม นั่นคือ

$$k = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

เมื่อ a, b, c และ d แทนความยาวด้านแต่ละด้านของรูปสี่เหลี่ยม

$$s = \frac{a+b+c+d}{2} \text{ แทนครึ่งหนึ่งของความยาวรอบรูปสี่เหลี่ยม}$$

กิตติกรรมประกาศ

โครงการฉบับนี้มีจุดมุ่งหมายเพื่อพิสูจน์สูตรการหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมที่แนบในวงกลม โดยใช้ความรู้ความสัมพันธ์ของรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ ที่แนบในวงกลม โดยใช้ความรู้เรื่อง รูปสามเหลี่ยมคล้าย ความสัมพันธ์ของรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ ที่แนบในวงกลม กฎของโคไซน์ และอัตราส่วนตรีโกณมิติ ซึ่งในการทำโครงการนั้นต้องใช้กระบวนการหลายขั้นตอน ตั้งแต่การศึกษาหาข้อมูลในการทำโครงการ การวิเคราะห์หาความสัมพันธ์ของรูป การจัดทำเล่มโครงการ จนกระทั่งโครงการนี้สำเร็จ ตลอดระยะเวลาการจัดทำโครงการทางคณะผู้จัดทำได้รับความช่วยเหลือและคำแนะนำในหลาย ๆ ด้าน ตลอดจนได้รับกำลังใจจากบุคคลรอบข้าง ทางคณะผู้จัดทำได้ซาบซึ้งในความกรุณาจากทุกท่าน เป็นอย่างยิ่ง ขอขอบคุณทุกท่าน ณ โอกาสนี้

ขอขอบคุณคุณครูธันวา สิทธิพันธุ์ และคุณครูศุภิสรา ไกรสิทธิ์ คุณครูกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์โครงการ SMTP โรงเรียนเบญจมราชูทิศ คุณครูเป็นที่ปรึกษาโครงการและได้ให้คำปรึกษา และคำแนะนำเกี่ยวกับการคิดรูปแบบโครงการและการจัดทำโครงการทำให้โครงการสำเร็จลุล่วง และผ่านไปได้ด้วยดี

และสุดท้ายนี้คณะผู้จัดทำขอกราบขอบพระคุณบิดาและมารดาที่ให้การอบรมเลี้ยงดู ส่งเสริมการเรียนรู้การศึกษาและตลอดจนถึงการให้กำลังใจเป็นอย่างดี และขอขอบคุณเจ้าของผลงานเอกสารและงานวิจัย ที่เกี่ยวข้องทุกท่านที่ทางคณะผู้จัดทำได้นำมาอ้างอิงในการทำโครงการทำให้โครงการฉบับนี้เป็นโครงการที่สมบูรณ์

คณะผู้จัดทำ

สารบัญ

เรื่อง	หน้า
บทคัดย่อ	ก
กิตติกรรมประกาศ	ข
บทที่ 1 บทนำ	1
บทที่ 2 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	3
บทที่ 3 วิธีการดำเนินงาน	9
บทที่ 4 ผลการดำเนินงาน	16
บทที่ 5 สรุปอภิปรายผลการดำเนินงานและข้อเสนอแนะ เอกสารอ้างอิง	18

สารบัญรูปภาพ

รูปภาพ	หน้า
รูปที่ 1 รูปประกอบทฤษฎีบท	1
รูปที่ 2 รูปประกอบทฤษฎีบท	3
รูปที่ 3 รูปประกอบทฤษฎีบท	4
รูปที่ 4 รูปประกอบบทนิยาม	5
รูปที่ 5 รูปประกอบบทพิสูจน์	6
รูปที่ 6 รูปประกอบทฤษฎีบท	8
รูปที่ 7 รูปประกอบทฤษฎีบท	9
รูปที่ 8 รูปประกอบบทพิสูจน์	9
รูปที่ 9 รูปประกอบบทพิสูจน์	10
รูปที่ 10 รูปประกอบบทพิสูจน์	10
รูปที่ 11 รูปประกอบบทพิสูจน์	11
รูปที่ 12 รูปประกอบบทพิสูจน์	12
รูปที่ 13 รูปประกอบบทพิสูจน์	13
รูปที่ 14	16
รูปที่ 15	18

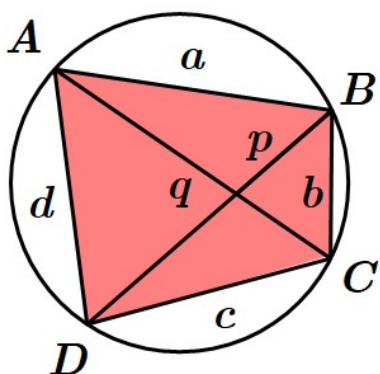
บทที่ 1

บทนำ

1.1 ที่มาและความสำคัญ

การพิสูจน์หาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ ที่แนบในวงกลม โดยใช้ความรู้เรื่อง รูปสามเหลี่ยมคล้าย ทฤษฎีบทวงกลม ความสัมพันธ์ของรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ ที่แนบในวงกลม คือ ผลรวมของผลคูณของด้านตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ ที่แนบในวงกลมทั้งสองคู่ จะมีค่าเท่ากับ ผลคูณของความยาวเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ ที่แนบในวงกลมเท่ากับ $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$ และนำไปประยุกต์ใช้กับกฎของโคไซน์ และอัตราส่วนตรีโกณมิติ เพื่อใช้ในการพิสูจน์การหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ ที่แนบในวงกลมของ กล่าวหาว่า กำหนดให้รูปสี่เหลี่ยม ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ ที่แนบในวงกลม มีความยาวด้านทั้งสี่เท่ากับ a, b, c และ d ตามลำดับ โดยที่ k คือ พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมที่แนบในวงกลมนั้นคือ

$$k = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$



รูปที่ 1 รูปประกอบทฤษฎีบท

เมื่อ a, b, c และ d แทนความยาวด้านแต่ละด้านของรูปสี่เหลี่ยม

$$s = \frac{a+b+c+d}{2} \text{ แทนครึ่งหนึ่งของความยาวรอบรูปสี่เหลี่ยม}$$

คณะผู้จัดทำเห็นความสำคัญของการศึกษาการพิสูจน์สูตรการหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ ที่แนบในวงกลมเนื่องจากช่วยให้สามารถหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ ที่แนบในวงกลมใด ๆ ได้เมื่อทราบความยาวของด้านทั้งสี่ด้านและได้ทำให้ผู้จัดทำมีความเข้าใจในแนวคิดเรื่อง รูปสามเหลี่ยมคล้าย ทฤษฎีบทเรขาคณิต และตรีโกณมิติ ที่นำมาใช้ในการพิสูจน์ ซึ่งเป็นสาระสำคัญของคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษา นอกจากนี้ยังสามารถนำความรู้ไปประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหาโจทย์เรขาคณิตที่ซับซ้อนยิ่งขึ้น รวมถึงช่วยพัฒนาทักษะการคิดวิเคราะห์ การเชื่อมโยงแนวคิดทางคณิตศาสตร์ในรูปแบบต่าง ๆ ได้อย่างมีประสิทธิภาพด้วยการนำความรู้ทางคณิตศาสตร์มาใช้

1.2 วัตถุประสงค์

1.2.1 เพื่อพิสูจน์สูตรการหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ ที่แนบในวงกลม

1.3 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1.3.1 ได้รับความรู้และความเข้าใจในเนื้อหาเรขาคณิตศาสตร์ เรื่อง ทฤษฎีบทวงกลม รูปสามเหลี่ยมคล้าย ความสัมพันธ์ของรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ ที่แนบในวงกลม กฎของโคไซน์ และอัตราส่วนตรีโกณมิติ

1.3.2 สามารถนำแนวคิดที่ได้จากการพิสูจน์ไปประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหาโจทย์เรขาคณิตที่ซับซ้อนได้อย่างมีประสิทธิภาพ

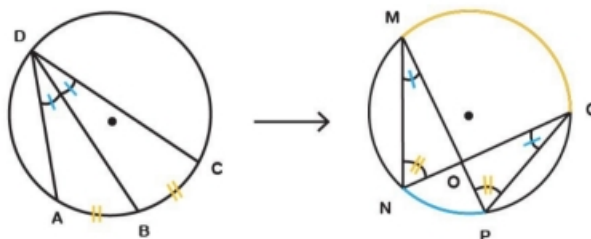
บทที่ 2

เอกสารที่เกี่ยวข้อง

การศึกษานี้ คณะผู้ทำโครงการได้ศึกษาเอกสารที่เกี่ยวข้องเพื่อใช้กำหนดทิศทางในการทำโครงการ เรื่อง การพิสูจน์สูตรหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ ที่แนบในวงกลม โดยใช้ความรู้เรื่อง รูปสามเหลี่ยมคล้าย ทฤษฎีบทวงกลม ความสัมพันธ์ของรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ ที่แนบในวงกลม กฎของโคไซน์ และอัตราส่วนตรีโกณมิติ ในการพิสูจน์เอกสารที่เกี่ยวข้อง ดังนี้

2.1 ทฤษฎีบทวงกลม

2.1.1 ทฤษฎีบท ในวงกลมที่เท่ากันทุกประการหรือในวงกลมวงเดียวกัน ถ้ามุมในส่วนโค้งของวงกลมมีขนาดเท่ากัน แล้วส่วนโค้งที่รองรับมุมเหล่านั้นจะยาวเท่ากัน ในทำนองเดียวกัน ในวงกลมที่เท่ากันทุกประการหรือในวงกลมวงเดียวกัน ถ้าส่วนโค้งที่รองรับมุมยาวเท่ากัน แล้วมุมในส่วนโค้งที่รองรับด้วยส่วนโค้งเหล่านั้นจะมีขนาดเท่ากัน หรือสามารถกล่าวได้ว่า มุมในส่วนโค้งของวงกลมมีขนาดเท่ากัน ก็ต่อเมื่อส่วนโค้งที่รองรับมุมยาวเท่ากัน

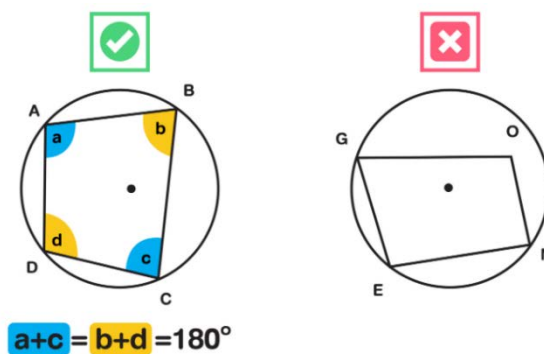


รูปที่ 2 รูปประกอบทฤษฎีบท

ที่มา : <https://www.smartmathpro.com/article/circle-m3/>

พิจารณารูปที่ 2 จะเห็นว่า $\widehat{ADB}$ และ $\widehat{BDC}$ มีขนาดเท่ากัน แล้วจะได้ว่าส่วนโค้ง AB ยาวเท่ากับ ส่วนโค้ง BC หรือจะมองในทางกลับกัน คือ ถ้าส่วนโค้งที่รองรับมุมยาวเท่ากัน มุมในส่วนโค้งจะมีขนาดเท่ากันไปด้วยในทำนองเดียวกัน มุมที่รองรับด้วยส่วนโค้ง NP คือ $\widehat{NPQ}$ และ $\widehat{MPQ}$ แล้วทั้งสองมุมจะมีขนาดเท่ากัน หรือมุมที่รองรับด้วยส่วนโค้ง MQ คือ $\widehat{MNQ}$ และ $\widehat{MPQ}$ แล้วทั้งสองมุมจะมีขนาดเท่ากันเช่นเดียวกัน

2.1.2 ผลบวกของขนาดของมุมตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ ที่แนบในวงกลมจะเท่ากับ 180 องศาหรือสองมุมฉาก



รูปที่ 3 รูปประกอบทฤษฎีบท

ที่มา : <https://www.smartmathpro.com/article/circle-m3/>

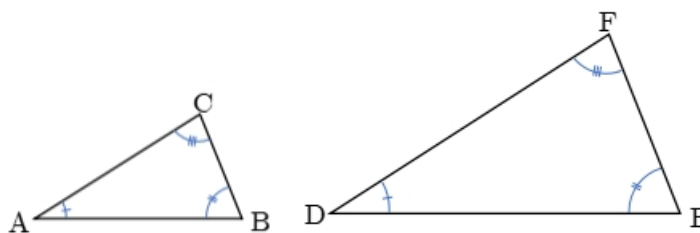
จากรูปด้านซ้าย จะเห็นว่าจุด A, B, C, และ D เป็นจุดบนส่วนโค้งของวงกลม จะเห็นว่ารูปสี่เหลี่ยม ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ ที่แนบในวงกลม ซึ่งมีมุมภายในของรูปสี่เหลี่ยมเป็น a, b, c และ d ถ้ามุม A อยู่ตรงข้ามกับมุม C แล้วผลบวกของ A กับ C จะเท่ากับ 180 องศา ในทำนองเดียวกัน ถ้ามุม B อยู่ตรงข้ามกับมุม D แล้วผลบวกของ B กับ D จะเท่ากับ 180 องศา ข้อควรระวัง จากรูปด้านขวาข้างต้น จุด O ไม่ได้อยู่บนส่วนโค้งของวงกลม ดังนั้น รูปสี่เหลี่ยม GONE ไม่เรียกว่าเป็นรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ ที่แนบในวงกลม

2.2 รูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกัน

บทนิยาม ของรูปหลายเหลี่ยมที่คล้ายกัน $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ ก็ต่อเมื่อ

$$1) \hat{A} = \hat{D}, \hat{B} = \hat{E} \text{ และ } \hat{C} = \hat{F}$$

$$2) \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$$



รูปที่ 4 รูปประกอบบทนิยาม

นั่นคือ ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปมีขนาดของมุมเท่ากันเป็นคู่ ๆ สามคู่ แล้วอัตราส่วนของความยาวของด้านคู่ที่สมนัยกันทั้งสามคู่จะเท่ากันด้วย

2.3 อัตราส่วน

อัตราส่วน คือ การเปรียบเทียบปริมาณตั้งแต่สองปริมาณขึ้นไป ซึ่งปริมาณที่เอามาเปรียบเทียบกันนั้นจะมีหน่วยเดียวกันหรือต่างกันได้ซึ่งเราจะเขียนแทนในรูปของเศษส่วน ในทางคณิตศาสตร์จะเขียนได้ดังนี้

อัตราส่วน a ต่อ b เขียนแทนด้วย $a : b$ หรือ $\frac{a}{b}$

a แทนปริมาณของสิ่งแรกที่น่ามาเปรียบเทียบ

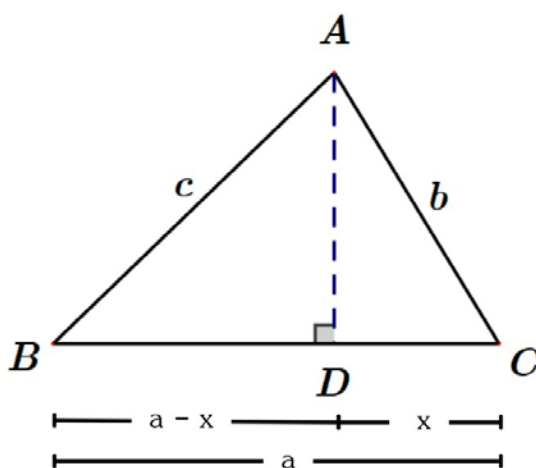
b แทนปริมาณของสิ่งที่สอง

อัตราส่วนที่เท่ากัน คือ อัตราส่วนที่แสดงอัตราเดียวกัน การคิดอัตราส่วนที่เท่ากัน สามารถทำได้ 2 วิธี ได้แก่ ใช้หลักการคูณ เป็นการนำจำนวนใด ๆ ที่ไม่เท่ากับศูนย์คูณเข้าไปในทุกจำนวนของอัตราส่วน จะได้อัตราส่วนใหม่ที่เท่ากับอัตราส่วนเดิม หรือ ใช้หลักการหาร เป็นการนำจำนวนใด ๆ ที่ไม่เท่ากับศูนย์มาหารจำนวนทุกตัวในอัตราส่วน จะได้อัตราส่วนใหม่ที่เท่ากับอัตราส่วนเดิม การเปรียบเทียบการเท่ากันของอัตราส่วน มีวิธีการตรวจสอบว่าอัตราส่วนนั้น ๆ เป็นอัตราส่วนที่เท่ากันหรือไม่ สามารถทำได้ 3 วิธี คือ การทำส่วนให้เท่ากัน โดยใช้หลักการคูณการทำให้เป็นอัตราส่วนอย่างต่ำ ใช้หลักการเดียวกับการทำ

ให้เป็นเศษส่วนอย่างต่ำ คือการใช้หลักการหาร การคูณไขว้ หลักการนี้เราจะใช้ตรวจสอบการเท่ากันเมื่อเรามีอัตราส่วนอยู่สองชุดและต้องการตรวจสอบว่าทั้งสองอัตราส่วนนั้นเท่ากันหรือไม่ หากได้ผลคูณเท่ากัน แสดงว่าอัตราส่วนทั้งสองเท่ากัน

2.4 กฎของโคไซน์

กฎของโคไซน์เป็นกฎที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความยาวด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมกับค่า $\cos$ ของมุมภายในมุมหนึ่ง



รูปที่ 5 รูปประกอบการพิสูจน์

จากรูปที่ 5 จะได้ $\cos C = \frac{x}{b}$ ดังนั้น $x = b \cos C$

$$\text{จากรูป } \triangle ABD ; AD^2 = c^2 - (a-x)^2 \text{ ----- (1)}$$

$$\text{จากรูป } \triangle ADC ; AD^2 = b^2 - x^2 \text{ ----- (2)}$$

$$(1) = (2) ; c^2 - (a-x)^2 = b^2 - x^2$$

$$c^2 - (a^2 - 2ax + x^2) = b^2 - x^2$$

$$c^2 - a^2 + 2ax - x^2 = b^2 - x^2$$

$$c^2 - a^2 + 2ax = b^2$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ax$$

$$\therefore c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

จะได้ว่า

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

2.5 ครึ่งหนึ่งของความยาวรอบรูปของรูปสี่เหลี่ยม

นิยามของเซมิเพอริมิเตอร์ (Definition of Semi-perimeter) คำว่า "Semi-" เป็นคำอุปสรรค (Prefix) ในภาษาละติน แปลว่า "ครึ่งหนึ่ง" ดังนั้น เซมิเพอริมิเตอร์ (Semi-perimeter) จึงหมายถึง ความยาวครึ่งหนึ่งของเส้นรอบรูปของรูปหลายเหลี่ยม หรือรูปทรงปิดสองมิติใด ๆ ในทางคณิตศาสตร์ นิยมใช้ตัวอักษรภาษาอังกฤษตัวเล็กคือ s เป็นสัญลักษณ์สากลแทนค่าเซมิเพอริมิเตอร์ โดยสามารถสรุปความสัมพันธ์พื้นฐานได้ดังสมการ

$$s = \frac{a + b + c + d}{2}$$

2.6 เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ

เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ คือ การเท่ากันของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่ต่างกัน และเป็นจริงสำหรับทุก ๆ ค่าของขนาดของมุม

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1, \sin^2 A = 1 - \cos^2 A \text{ หรือ } \cos^2 A = 1 - \sin^2 A$$

$$\sec^2 A - \tan^2 A = 1, \sec^2 A = 1 + \tan^2 A \text{ หรือ } \sec^2 A - 1 = \tan^2 A \text{ เมื่อ } \cos A \neq 0$$

$$\csc^2 A - \cot^2 A = 1, \csc^2 A = 1 + \cot^2 A \text{ หรือ } \csc^2 A - 1 = \cot^2 A \text{ เมื่อ } \sin A \neq 0$$

2.6.1 เอกลักษณ์ตรีโกณมิติของมุมรวมกันได้สองมุมฉาก (Supplementary Angles)

มุมสองมุมจะเป็นมุมรวมกันได้สองมุมฉาก ถ้าผลรวมของมุมทั้งสองเท่ากับ 180 องศา ในทำนองเดียวกัน

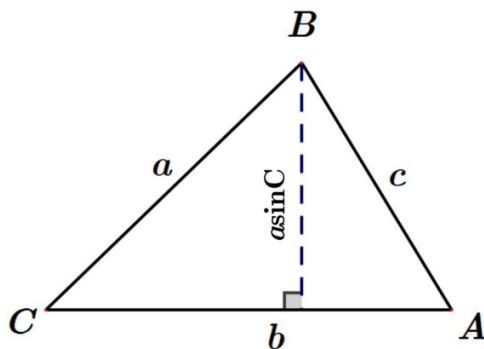
$$\sin (180^\circ - \theta) = \sin \theta$$

$$\cos (180^\circ - \theta) = -\cos \theta$$

$$\csc (180^\circ - \theta) = \csc \theta$$

$$\sec (180^\circ - \theta) = -\sec \theta$$

2.7 การหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมด้วยไซน์



รูปที่ 6 รูปประกอบทฤษฎีบท

เมื่อทราบความยาวของด้านสองด้านของสามเหลี่ยม และขนาดของมุมที่อยู่ระหว่างด้านทั้งสอง

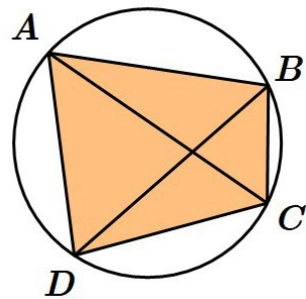
$$\begin{aligned}
 \text{พื้นที่ของสามเหลี่ยมจะหาได้จากสูตรพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม } ABC &= \frac{1}{2}ab\sin C \\
 &= \frac{1}{2}ac\sin B \\
 &= \frac{1}{2}bc\sin A
 \end{aligned}$$

บทที่ 3

วิธีการดำเนินงาน

ในการจัดทำโครงงาน เรื่อง การพิสูจน์สูตรหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ ที่แนบในวงกลม โดยใช้ความรู้เรื่อง รูปสามเหลี่ยมคล้าย ทฤษฎีบทวงกลม ความสัมพันธ์ของรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ ที่แนบในวงกลม กฎของโคไซน์ และอัตราส่วนตรีโกณมิติ ในการพิสูจน์ ผู้จัดทำได้วางแผนการดำเนินงาน ดังนี้

3.1 พิสูจน์ $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$

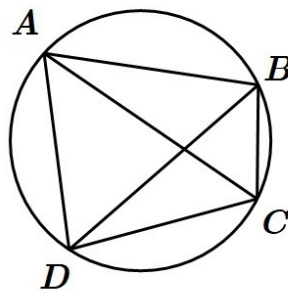


รูปที่ 7 รูปประกอบทฤษฎีบท

กำหนดให้ $\square ABCD$ เป็น รูปสี่เหลี่ยมใด ๆ ที่แนบในวงกลม

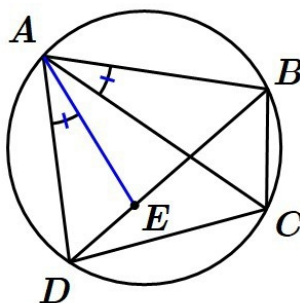
ต้องการพิสูจน์ว่า $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$

กำหนดให้ลากเส้นทแยงมุม $\overline{AC}$ และ $\overline{BD}$



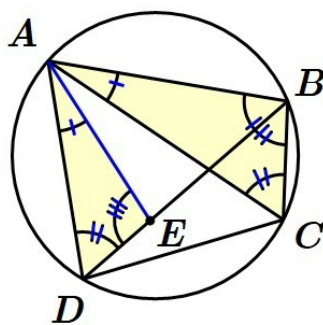
รูปที่ 8 รูปประกอบการศึกษา

กำหนดให้ $\hat{BAC} = x^\circ$ และสร้าง $\overline{AE}$ โดยที่ E อยู่บนเส้นทแยงมุม $\overline{BD}$ เพื่อให้ $\hat{BAC} = \hat{DAE}$



รูปที่ 9 รูปประกอบการพิสูจน์

พิจารณา $\triangle ADE \sim \triangle ACB$ หรือไม่ พิจารณาจากมุมคู่ที่สมนัยกัน ดังนี้



รูปที่ 10 รูปประกอบการพิสูจน์

- 1) $\hat{DAE} = \hat{BAC}$ เพราะ จากการสร้าง $\overline{AE}$ โดยที่ E อยู่บนเส้นทแยงมุม $\overline{BD}$ เพื่อให้ $\hat{BAC} = \hat{DAE}$
- 2) $\hat{ADE} = \hat{ACB}$ เพราะ เป็นมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกันมีขนาดเท่ากัน
- 3) $\hat{AED} = \hat{ABC}$ เพราะ มุมภายในของรูปสามเหลี่ยมรวมกันได้ 180° เมื่อมุม 2 มุมมีขนาดเท่ากัน และอีก 1 มุมจะมีขนาดเท่ากัน

ดังนั้น $\triangle ADE \sim \triangle ACB$ เพราะ มีมุมคู่ที่สมนัยกันมีขนาดเท่ากันทุกคู่ 3 คู่
 จะได้ว่า อัตราส่วนของความยาวด้านคู่ที่สมนัยกันมีขนาดเท่ากันทุกคู่ ดังนี้

$$\frac{AD}{AC} = \frac{DE}{CB} = \frac{AE}{AB}$$

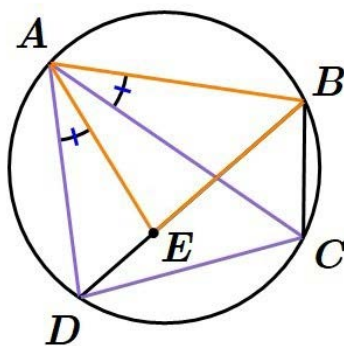
พิจารณาเลือกอัตราส่วน

จะได้
$$\frac{AD}{AC} = \frac{DE}{CB}$$

$$AD \cdot CB = DE \cdot AC \text{ ----- (1)}$$

กำหนดให้ $\hat{EAC} = y^\circ$ เพื่อให้ $\hat{EAB} = x^\circ + y^\circ$ และ $\hat{DAC} = x^\circ + y^\circ$ ดังนั้น $\hat{EAB} = \hat{DAC}$

พิจารณา $\triangle AEB \sim \triangle ADC$ หรือไม่ พิจารณาจากมุมคู่ที่สมนัยกัน ดังนี้



รูปที่ 11 รูปประกอบการพิสูจน์

- 1) $\hat{BAE} = \hat{CAD}$ เพราะ จากการสร้าง $\overline{AE}$ โดยที่ E อยู่บนเส้นทแยงมุม $\overline{BD}$ เพื่อให้ $\hat{BAC} = \hat{DAE}$
 - 2) $\hat{ABD} = \hat{ACD}$ เพราะ เป็นมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกันมีขนาดเท่ากัน
 - 3) $\hat{AEB} = \hat{ADC}$ เพราะ มุมภายในของรูปสามเหลี่ยมรวมกันได้ 180° เมื่อมุม 2 มุมมีขนาดเท่ากัน และอีก 1 มุมจะมีขนาดเท่ากัน
- ดังนั้น $\triangle ADE \sim \triangle ACB$ เพราะ มีมุมคู่ที่สมนัยกันมีขนาดเท่ากันทุกคู่ 3 คู่
- จะได้ว่า อัตราส่วนของความยาวด้านคู่ที่สมนัยกันมีขนาดเท่ากันทุกคู่ ดังนี้

$$\frac{AE}{AD} = \frac{EB}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

พิจารณาเลื่อกอัตราส่วน

จะได้
$$\frac{EB}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

$$EB \cdot AC = AB \cdot DC \text{ ----- (2)}$$

นำสมการที่ (1) + (2) ; $(AD \cdot CB) + (AB \cdot DC) = (DE \cdot AC) + (EB \cdot AC)$

$$AD \cdot BC + DC \cdot AB = AC(DE + BE)$$

ซึ่ง $DE + BE = BD$

ดังนั้น $AD \cdot BC + DC \cdot AB = AC \cdot BD$

3.2 หาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ ที่แนบในวงกลม

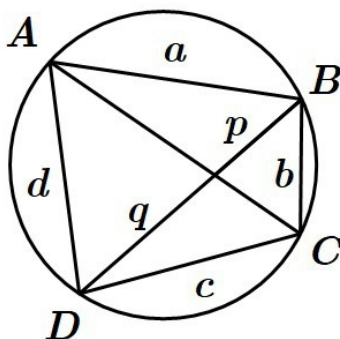
กำหนดให้ $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ ที่แนบในวงกลม

จากการพิสูจน์จะได้ความสัมพันธ์ว่า $AD \cdot BC + DC \cdot AB = AC \cdot BD$

กำหนดให้ $AB = a$ หน่วย $BC = b$ หน่วย $CD = c$ หน่วย $DA = d$ หน่วย $AC = p$ หน่วย

$BD = q$ หน่วย

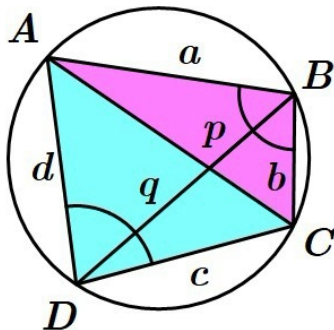
จะได้ $pq = ac + bd \text{ ----- (3)}$



รูปที่ 12 รูปประกอบการพิสูจน์

และครึ่งหนึ่งของความยาวรอบรูปคือ $s = \frac{a + b + c + d}{2}$

ให้พื้นที่ของ $\square ABCD = k$ หน่วย² สามารถแบ่งออกเป็นรูปสามเหลี่ยม 2 รูป คือ $\triangle ABC$ และ $\triangle ADC$



รูปที่ 13 รูปประกอบการพิสูจน์

จะได้
$$k = \frac{1}{2}ab\sin B + \frac{1}{2}cd\sin D \text{ ----- (4)}$$

เนื่องจาก $\square ABCD$ เป็น รูปสี่เหลี่ยมใด ๆ ที่แนบในวงกลม มุมตรงข้ามรวมกันได้ 180°

นั่นคือ $\hat{D} + \hat{B} = 180^\circ$

$$\hat{D} = 180^\circ - \hat{B}$$

จะได้ว่า $\sin D = \sin(180^\circ - \hat{B}) = \sin B$

แทนค่า $\sin D$ ด้วย $\sin B$ ในสมการที่ 4

จะได้
$$k = \frac{1}{2}ab\sin B + \frac{1}{2}cd\sin B$$

$$k = \frac{1}{2}(ab + cd)\sin B \text{ ----- (5)}$$

จากสมการที่ (5) เป็นการหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมใด ๆ ที่แนบในวงกลม โดยใช้มุม $\sin$ คือ การใช้สูตรพื้นที่

$$\frac{1}{2} (\text{ผลคูณของด้านสองด้าน}) (\sin \text{ ของมุมที่อยู่ระหว่างด้าน})$$

หาค่า $\sin B$ โดยใช้กฎของโคไซน์

$$\text{พิจารณา } \triangle ABC \text{ จะได้ } q^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos B \text{ ----- (6)}$$

$$\text{พิจารณา } \triangle ADC \text{ จะได้ } q^2 = c^2 + d^2 - 2cd \cos D \text{ ----- (7)}$$

เนื่องจาก $\cos D = \cos(180^\circ - B) = -\cos B$

$$\text{จะได้ } q^2 = c^2 + d^2 + 2cd \cos B$$

$$\text{นำสมการ (6) = (7) } \quad a^2 + b^2 - 2ab \cos B = c^2 + d^2 + 2cd \cos B$$

$$a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 2(ab + cd) \cos B$$

$$\cos B = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)}$$

หาค่า $1 - \cos B$ และ $1 + \cos B$

1) หาค่า $1 - \cos B$

$$\text{จะได้ } 1 - \cos B = 1 - \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)}$$

$$1 - \cos B = \frac{(c + d)^2 - (a - b)^2}{2(ab + cd)}$$

$$1 - \cos B = \frac{(c + d + b - a)(c + d + a - b)}{2(ab + cd)}$$

$$1 - \cos B = \frac{2(s - a) \cdot 2(s - b)}{2(ab + cd)}$$

$$1 - \cos B = \frac{2(s - a)(s - b)}{(ab + cd)} \text{ ----- (8)}$$

2) หาค่า $1 + \cos B$

$$\text{จะได้ } 1 + \cos B = 1 + \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)}$$

$$1 + \cos B = \frac{(a+b)^2 - (c-d)^2}{2(ab+cd)}$$

$$1 + \cos B = \frac{(a+b+d-c)(a+b+c-d)}{2(ab+cd)}$$

$$1 + \cos B = \frac{2(s-c) \cdot 2(s-d)}{2(ab+cd)}$$

$$1 + \cos B = \frac{2(s-c)(s-d)}{(ab+cd)} \text{ ----- (9)}$$

นำ (8) • (9) เพื่อหา $\sin B$

จะได้ $\sin^2 B = (1 - \cos B)(1 + \cos B)$

$$\sin^2 B = \frac{4(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}{(ab+cd)^2}$$

$$\sin B = \sqrt{\frac{4(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}{(ab+cd)^2}}$$

$$\sin B = \frac{2\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}}{(ab+cd)} \text{ ----- (10)}$$

หาพื้นที่ $\square ABCD$

แทนค่า $\sin B$ จาก (10) ลงใน (5)

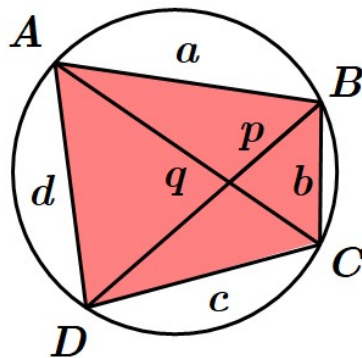
จะได้ $k = \frac{1}{2}(ab+cd) \cdot \frac{2\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}}{(ab+cd)}$

$$k = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

บทที่ 4

ผลการดำเนินงาน

จากการพิสูจน์ความสัมพันธ์ของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมใด ๆ ที่แนบในวงกลม โดยใช้ความรู้เรื่อง รูปสามเหลี่ยมคล้าย ทฤษฎีบทวงกลม ความสัมพันธ์ของรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ ที่แนบในวงกลม กฎของโคไซน์ และอัตราส่วนตรีโกณมิติ ผู้จัดทำได้วางแผนการดำเนินงาน ดังนี้



รูปที่ 14

จากการดำเนินงาน เมื่อรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ ที่แนบในวงกลม ผลรวมของผลคูณของด้านตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ ที่แนบในวงกลมทั้งสองคู่ จะมีค่าเท่ากับ ผลคูณของความยาวเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ ที่แนบในวงกลมเท่ากับ $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$ จากการสร้าง $\overline{AE}$ โดยที่ E อยู่บนเส้นทแยงมุม $\overline{BD}$ จะเกิดรูปสามเหลี่ยม $\triangle ADE$, $\triangle ACB$, $\triangle AEB$ และ $\triangle ADC$ ซึ่งมีรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกันทั้งหมด 2 คู่ นั่นคือ $\triangle ADE \sim \triangle ACB$ และ $\triangle AEB \sim \triangle ADC$ จะได้อัตราส่วนของความยาวด้านคู่ที่สมนัยกันมีขนาดเท่ากันทุกคู่ ดังนี้

$$AD \cdot CB = DE \cdot AC \text{ ----- (1)}$$

$$EB \cdot AC = AB \cdot DC \text{ ----- (2)}$$

$$\text{นำสมการที่ (1) + (2) ; } (AD \cdot CB) + (AB \cdot DC) = (DE \cdot AC) + (EB \cdot AC)$$

$$AD \cdot BC + DC \cdot AB = AC(DE + BE)$$

$$\text{ซึ่ง } DE + BE = BD$$

$$\text{ดังนั้น } AD \cdot BC + DC \cdot AB = AC \cdot BD$$

ในพื้นที่ของ $\square ABCD = k$ หน่วย² สามารถแบ่งออกเป็นรูปสามเหลี่ยม 2 รูป คือ $\triangle ABC$ และ $\triangle ADC$

จะได้
$$k = \frac{1}{2}(ab + cd)\sin B \text{ ----- (5)}$$

จากสมการที่ (5) เป็นการหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมใด ๆ โดยใช้ค่า $\sin$

จาก $\cos D = \cos(180^\circ - B) = -\cos B$

จะได้ $q^2 = c^2 + d^2 - 2cd\cos D$

นำสมการ (6) = (7)
$$\cos B = \frac{a^2 + b^2 - (c^2 - d^2)}{2(ab + cd)}$$

หาค่า $1 - \cos B$ และ $1 + \cos B$

1) หาค่า $1 - \cos B$

จะได้
$$1 - \cos B = \frac{2(s-a)(s-b)}{(ab + cd)} \text{ ----- (8)}$$

2) หาค่า $1 + \cos B$

จะได้
$$1 + \cos B = \frac{2(s-c)(s-d)}{(ab + cd)} \text{ ----- (9)}$$

นำ (7) $\cdot$ (8) เพื่อหา $\sin B$

จะได้
$$\sin B = \frac{2\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}}{(ab + cd)} \text{ ----- (10)}$$

หาพื้นที่ $\square ABCD$

แทนค่า $\sin B$ จาก (9) ลงใน (4)

จะได้
$$k = \frac{1}{2}(ab + cd) \cdot \frac{2\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}}{(ab + cd)}$$

$$k = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

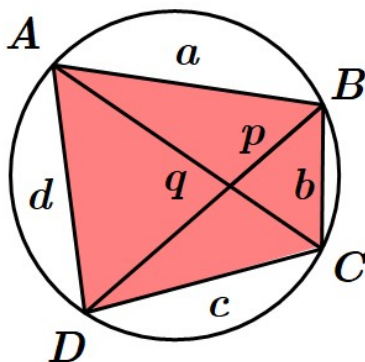
บทที่ 5

สรุป อภิปรายผลและข้อเสนอแนะ

5.1 สรุปผลและอภิปรายผลการทดลอง

เมื่อรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ ที่แนบในวงกลม ผลรวมของผลคูณของด้านตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ ที่แนบในวงกลมทั้งสองคู่ จะมีค่าเท่ากับ ผลคูณของความยาวเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ ที่แนบในวงกลมเท่ากับ $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$ จะได้ความสัมพันธ์ของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ ที่แนบในวงกลมเท่ากับ

$$k = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$



รูปที่ 15

5.2 ข้อเสนอแนะ

5.2.1 ศึกษาเปรียบเทียบการพิสูจน์และการหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ ที่ไม่แนบในวงกลม โดยใช้สมบัติของมุมตรงข้าม เพื่อให้ครอบคลุมรูปสี่เหลี่ยมทุกชนิด

เอกสารอ้างอิง

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ. หนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐาน คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3. เล่ม 1. พิมพ์ครั้งที่ 3. ลาดพร้าว 2249 ถนนลาดพร้าว วังทองหลาง กรุงเทพมหานคร. สำนักพิมพ์ สกสศ. 2565

นายภาคภูมิ อร่ามวารีกุล, นายมคร ทิพย์ชัยเชษฐา, และนายธงฉัตร อิงคุทานนท์. ดิวเข้มคณิตศาสตร์เข้าเตรียมอุดมฯ เล่ม 1. พิมพ์ครั้งที่ 2. 414 ชั้น 14 อาคารเอ็ม บี เค ทาวเวอร์ ถนนพญาไท แขวงวังใหม่ เขตปทุมวัน กรุงเทพมหานคร 10330. สำนักพิมพ์บริษัท ออนดีมานด์ เอ็ดดูเคชั่น จำกัด. 2568

ปวรุตม์ ธีรบุษยเวศย์. สรุปลวงกลมม.3 ทฤษฎีบทวงกลม[Online]. ปวรุตม์ ธีรบุษยเวศย์: ปวรุตม์ ธีรบุษยเวศย์, 2566. <https://www.smartmathpro.com/article/circle-m3/> สถาบันสมาร์ทแมทโปร [2 กันยายน พ.ศ.2568]

ปวรุตม์ ธีรบุษยเวศย์. ตรีโกณมิติ ม.5 [Online]. ปวรุตม์ ธีรบุษยเวศย์: ปวรุตม์ ธีรบุษยเวศย์, 2566. <https://www.smartmathpro.com/article/trigonometric-functions/> สถาบันสมาร์ทแมทโปร [26 พฤษภาคม พ.ศ.2566]