



โครงการคณิตศาสตร์
เรื่อง ทฤษฎีการหาพื้นที่ช่องว่างระหว่างวงกลมสามวงสัมผัสกัน
โดยมีรัศมี r เท่ากัน

ผู้จัดทำ

- | | | |
|-----------------------|----------|-----------------------|
| 1. เด็กชายหัตถุภรณ์ | องอาจ | ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 |
| 2. เด็กหญิงเสาวลักษณ์ | เนียมนวล | ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 |
| 3. เด็กหญิงสิริกัญญา | ทวาสะ | ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 |

อาจารย์ที่ปรึกษา

1. นายรุ่งเรือง มากดี
2. นางสาวลัดดาวรรณ อุปลา

โรงเรียนบางสวรรค์วิทยาคม

สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษาสุราษฎร์ธานี ชุมพร

รายงานนี้เป็นส่วนหนึ่งของโครงการคณิตศาสตร์ ระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น
ประเภทสร้างทฤษฎีหรือคำอธิบายทางคณิตศาสตร์
เนื่องในงานงานสัปดาห์วิทยาศาสตร์แห่งชาติส่วนภูมิภาค ประจำปี พ.ศ. 2569

โครงการคณิตศาสตร์
เรื่อง ทฤษฎีการหาพื้นที่ช่องว่างระหว่างวงกลมสามวงสัมผัสกัน
โดยมีรัศมี r เท่ากัน

ผู้จัดทำ

- | | | |
|-----------------------|---------|-----------------------|
| 1. เด็กชายหัตถุภรณ์ | องอาจ | ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 |
| 2. เด็กหญิงเสาวลักษณ์ | เนียมวล | ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 |
| 3. เด็กหญิงสิริกัญญา | ทวาสะ | ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 |

อาจารย์ที่ปรึกษา

1. นายรุ่งเรือง มากดี
2. นางสาวลัดดาวรรณ อุปลา

โรงเรียนบางสวรรค์วิทยาคม

สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษาสุราษฎร์ธานี ชุมพร

รายงานนี้เป็นส่วนหนึ่งของโครงการคณิตศาสตร์ ระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น
ประเภทสร้างทฤษฎีหรือคำอธิบายทางคณิตศาสตร์
เนื่องในงานงานสัปดาห์วิทยาศาสตร์แห่งชาติส่วนภูมิภาค ประจำปี พ.ศ. 2569

ชื่อโครงการ	ทฤษฎีการหาพื้นที่ช่องว่างระหว่างวงกลมสามวงสัมผัสกัน โดยมีรัศมี r เท่ากัน
คณะผู้ศึกษา	1. เด็กชายหิรัญกรณ์ ่องอาจ 2. เด็กหญิงเสาวลักษณ์ เนียมนวน 3. เด็กหญิงสิริกัญญา ทวาสะ
อาจารย์ที่ปรึกษา	1. นายรุ่งเรือง มากดี 2. นางสาวลัดดาวรรณ อุปลา
ระดับการศึกษา	มัธยมศึกษาตอนต้น
สถานศึกษา	โรงเรียนบางสวรรค์วิทยาคม อำเภอพระแสง จังหวัดสุราษฎร์ธานี 84210 สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษาสุราษฎร์ธานี ชุมพร
ปีการศึกษา	2569

บทคัดย่อ

โครงการคณิตศาสตร์ ประเภทการสร้างทฤษฎีและคำอธิบาย เรื่อง "ทฤษฎีการหาพื้นที่ช่องว่างระหว่างวงกลมสามวงสัมผัสกัน โดยมีรัศมี r เท่ากัน" มีวัตถุประสงค์ เพื่อศึกษาทฤษฎีการหาพื้นที่ช่องว่างระหว่างวงกลมสามวงที่สัมผัสกัน โดยมีรัศมี r เท่ากัน

คณะผู้จัดทำได้ดำเนินการโดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP) สร้างรูปวงกลมสามวงที่มีจุดศูนย์กลาง A , B และ C สัมผัสกัน แล้วลากส่วนของเส้นตรงเชื่อมจุดศูนย์กลางทั้งสามจุด ทำให้เกิดรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า ABC จากนั้นหาพื้นที่สามเหลี่ยมด้านเท่าดังกล่าว และหาพื้นที่เซกเตอร์ของวงกลมทั้งสามวงที่อยู่ภายในสามเหลี่ยม โดยอาศัยสมบัติของสามเหลี่ยมด้านเท่าที่มีมุมภายในแต่ละมุมเท่ากับ 60 องศา แล้วนำพื้นที่สามเหลี่ยมด้านเท่าลบด้วยผลรวมพื้นที่เซกเตอร์ทั้งสาม จะได้พื้นที่ช่องว่างระหว่างวงกลมสามวงที่ต้องการ

ผลการศึกษาพบว่า ทฤษฎีการหาพื้นที่ช่องว่างระหว่างวงกลมสามวงสัมผัสกัน โดยมีรัศมี r เท่ากัน สามารถคำนวณได้จากสูตร

$$A_1 = \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right)r^2$$

เมื่อ A_1 แทน พื้นที่ช่องว่างระหว่างวงกลมสามวงสัมผัสกัน (ตารางหน่วย)

r แทน ความยาวของรัศมีของวงกลม (หน่วย)

ผลการพิสูจน์แสดงให้เห็นว่าพื้นที่ช่องว่างดังกล่าวแปรผันตรงกับรัศมี (r^2) เสมอ ซึ่งสามารถนำทฤษฎีนี้ไปประยุกต์ใช้ในการคำนวณพื้นที่ช่องว่างจากการจัดเรียงวัตถุทรงกลมที่มีขนาดเท่ากันในสถานการณ์จริง

กิตติกรรมประกาศ

การศึกษาโครงการคณิตศาสตร์ประเภทการสร้างทฤษฎีและคำอธิบาย เรื่อง ทฤษฎีการหาพื้นที่ช่องว่างระหว่างวงกลมสามวงสัมผัสกัน โดยมีรัศมี r เท่ากัน เล่มนี้ สำเร็จลุล่วงโดยได้รับความอนุเคราะห์อย่างดีจากคุณครูรุ่งเรือง มากดี และคุณครูรัตดาวรรณ อุปลา ได้รับความกรุณาให้คำปรึกษาแนะนำแนวคิดวิธีการและสละเวลาอันมีค่าแก้ไขข้อบกพร่องของเนื้อหา และสำนวนภาษาด้วยเอาใจใส่อย่างยิ่ง คณะผู้ศึกษาขอกราบขอขอบคุณเป็นอย่างสูง ณ โอกาสนี้

ขอขอบพระคุณคณะผู้บริหารโรงเรียนบางสวรรค์วิทยาคมทุกท่าน หัวหน้ากลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ และครูในกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ โรงเรียนบางสวรรค์วิทยาคมทุกท่านที่ให้การสนับสนุนการดำเนินการศึกษาโครงการครั้งนี้จนสำเร็จด้วยดีตลอด คณะผู้จัดทำโครงการขอขอบคุณมา ณ โอกาสนี้

ท้ายที่สุดนี้ขอขอบพระคุณบิดา มารดา ที่คอยให้การช่วยเหลือในทุก ๆ ด้าน คอยเป็นกำลังใจ และให้ความห่วงใยเสมอมา ซึ่งคุณประโยชน์ของโครงการฉบับนี้ ทางคณะผู้จัดทำขอมอบแด่บิดา มารดา พร้อมด้วยครอบครัว ตลอดจนคณะครูอาจารย์ ที่ได้รับการอบรมสั่งสอนแก่คณะผู้จัดทำโครงการประสบความสำเร็จในการจัดทำครั้งนี้

คณะผู้จัดทำ

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อ	ก
กิตติกรรมประกาศ	ข
สารบัญ	ค
สารบัญตาราง	ง
สารบัญรูปภาพ	จ
บทที่ 1 บทนำ	
1.1 ที่มาและความสำคัญ	1
1.2 วัตถุประสงค์	1
1.3 สมมติฐาน	1
1.4 ขอบเขตการศึกษา	2
1.5 นิยามศัพท์เฉพาะ	2
บทที่ 2 เอกสารที่เกี่ยวข้อง	
2.1 ทฤษฎีสามเหลี่ยม	3
2.2 ทฤษฎีวงกลม	4
2.3 โปรแกรม The Geometer's sketchpad (GSP)	5
บทที่ 3 วิธีการดำเนินการ	
3.1 วิธีดำเนินการ	7
3.2 ขั้นตอนการดำเนินการ	7
บทที่ 4 ผลการดำเนินการ	
ผลการดำเนินการ	9
บทที่ 5 สรุปผล อภิปรายผลและข้อเสนอแนะ	
5.1 สรุปผล	13
5.2 อภิปรายผล	13
5.3 ประโยชน์ที่ได้รับ	14
5.4 ข้อเสนอแนะ	14
บรรณานุกรม	15
ภาพผนวก	16

สารบัญตาราง

ตาราง	หน้า
ตารางที่ 1 การเปรียบเทียบการหาพื้นที่ช่องว่างระหว่างวงกลมสามวงสัมผัสกัน โดยมีรัศมี r เท่ากัน จากสูตรและโปรแกรม The Geometer's Sketchpad	12

สารบัญรูปภาพ

ภาพ	หน้า
ภาพที่ 1 มุมภายในทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม	3
ภาพที่ 2 รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า	4
ภาพที่ 3 ความหมายและส่วนต่างๆของวงกลม	4
ภาพที่ 4 เซกเตอร์	5
ภาพที่ 5 พื้นที่เซกเตอร์	5
ภาพที่ 6 โปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP)	6
ภาพที่ 7 รูปเพื่อใช้ในการพิสูจน์ทฤษฎีการหาพื้นที่ช่องว่างระหว่างวงกลมสามวงสัมผัสกัน โดยมีรัศมี r เท่ากัน	9
ภาพที่ 8 ความยาวด้านของของสามเหลี่ยมด้านเท่า ABC	10
ภาพที่ 9 รูปเพื่อใช้ในการพิสูจน์พื้นที่เซกเตอร์	10
ภาพที่ 10 การหามุมภายในของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า	11
ภาพที่ 11 พื้นที่เซกเตอร์วงกลม	11
ภาพที่ 12 พื้นที่ช่องว่างระหว่างวงกลมสามวงสัมผัสกัน	12

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ที่มาและความสำคัญ

เรขาคณิตเป็นแขนงหนึ่งของคณิตศาสตร์ที่ศึกษารูปร่าง ขนาด และตำแหน่งของรูปเรขาคณิต ซึ่งมีบทบาทสำคัญทั้งในเชิงวิชาการและการประยุกต์ใช้ในชีวิตจริง โดยเฉพาะ "วงกลม" ที่ปรากฏในสิ่งของรอบตัว เช่น ท่อ เหยือก และภาชนะทรงกระบอก

ในการจัดเรียงวัตถุทรงกลมให้สัมผัสกันมากที่สุด เช่น การมัดรวมท่อ หรือการบรรจุภาชนะทรงกระบอกลงในลัง มักเกิดพื้นที่ช่องว่างระหว่างวัตถุขึ้นเสมอ โดยเฉพาะเมื่อนำวงกลมที่มีรัศมีเท่ากันสามวงมาวางสัมผัสกัน จะเกิดพื้นที่ช่องว่างตรงกลางเป็นรูปสามเหลี่ยมโค้ง (Curvilinear Triangle) ซึ่งไม่สามารถหาพื้นที่ได้ด้วยสูตรพื้นฐานสูตรเดียว แต่ต้องอาศัยการบูรณาการความรู้เรื่องพื้นที่วงกลม เซกเตอร์ และสามเหลี่ยมด้านเท่าเข้าด้วยกัน

ด้วยเหตุผลดังกล่าวข้างต้น คณะผู้จัดทำจึงมีความสนใจที่จะศึกษา ทฤษฎีการหาพื้นที่ช่องว่างระหว่างวงกลมสามวงสัมผัสกัน โดยมีรัศมี r เท่ากัน โดยมุ่งหวังที่จะนำเสนอแนวคิดวิธีการพิสูจน์สูตรการคำนวณที่ถูกต้อง ชัดเจน และสามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้จริง อีกทั้งยังเป็นการฝึกฝนกระบวนการทำงานทางคณิตศาสตร์อย่างเป็นระบบ ตั้งแต่การตั้งข้อสังเกต การสร้างข้อความคาดการณ์ การพิสูจน์ด้วยหลักการทางเรขาคณิตและพีชคณิต ไปจนถึงการสรุปผลและนำเสนอองค์ความรู้ที่ได้ ซึ่งจะเป็นประโยชน์ต่อการพัฒนาทักษะทางคณิตศาสตร์และการคิดอย่างมีเหตุผลของผู้จัดทำโครงการต่อไป

1.2 วัตถุประสงค์

1. เพื่อศึกษาทฤษฎีการหาพื้นที่ช่องว่างระหว่างวงกลมสามวงสัมผัสกัน โดยมีรัศมี r เท่ากัน

1.3 สมมติฐาน

พื้นที่ช่องว่างระหว่างวงกลมสามวงสัมผัสกันที่มีรัศมี r เท่ากัน สามารถหาได้จาก พื้นที่สามเหลี่ยมด้านเท่าของวงกลมสามวง ลบด้วยพื้นที่เซกเตอร์ของวงกลมสามวงรวมกัน โดยคาดว่า จะได้สูตร

$$A = (\sqrt{3} - \frac{\pi}{2})r^2$$

และพื้นที่จะแปรผันตรงกับ r^2 เสมอ

1.4 ขอบเขตการศึกษา

1. ขอบเขตการศึกษาด้านเนื้อหา

1.1 ศึกษาการหาพื้นที่ช่องว่างระหว่างวงกลมสามวงที่สัมผัสกัน โดยมีรัศมี r เท่ากัน

2. ขอบเขตด้านระยะเวลา

2.1 วันที่ 23 มิถุนายน 2569 - วันที่ 3 สิงหาคม 2569

3. ขอบเขตด้านสถานที่

3.1 โรงเรียนบางสวรรค์วิทยาคม ตำบลบางสวรรค์ อำเภอยะรัง
จังหวัดสุราษฎร์ธานี

1.5 นิยามศัพท์เฉพาะ

วงกลม หมายถึง เซตของจุดทุกจุดบนระนาบที่อยู่ห่างจากจุดคงที่จุดหนึ่งบนระนาบเดียวกันเป็นระยะทางเท่ากันทุกจุด โดยจุดคงที่นั้นเรียกว่าจุดศูนย์กลาง และระยะห่างจากจุดศูนย์กลางไปยังเส้นรอบวงเรียกว่ารัศมี ซึ่งกำหนดให้วงกลมทั้งสามวงมีรัศมียาวเท่ากัน คือ r หน่วย

สามเหลี่ยมด้านเท่า หมายถึง รูปสามเหลี่ยมที่มีความยาวด้านทั้งสามด้านเท่ากัน และมีขนาดมุมภายในทั้งสามมุมเท่ากัน มุมละ 60 องศา ซึ่งเกิดจากการลากส่วนของเส้นตรงเชื่อมจุดศูนย์กลาง A , B และ C ของวงกลมทั้งสามวงที่สัมผัสกัน โดยแต่ละด้านของสามเหลี่ยมมีความยาวเท่ากับ $2r$ หน่วย (r คือรัศมีของวงกลม)

เชกเตอร์ หมายถึง พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยรัศมีกับส่วนโค้งของวงกลมเดียวกัน ซึ่งใช้เชกเตอร์ที่มีมุมที่จุดศูนย์กลางเท่ากับ 60 องศา ของวงกลมแต่ละวง

พื้นที่ช่องว่าง หมายถึง พื้นที่บริเวณตรงกลางที่เกิดขึ้นจากการนำวงกลมสามวงที่มีรัศมีเท่ากันมาวางสัมผัสกัน มีลักษณะเป็นรูปสามเหลี่ยมโค้ง (Curvilinear Triangle) ซึ่งเป็นพื้นที่ส่วนที่เหลือจากการนำพื้นที่สามเหลี่ยมด้านเท่า ลบด้วยพื้นที่เชกเตอร์ของวงกลมทั้งสามวงที่อยู่ภายในสามเหลี่ยมด้านเท่า

บทที่ 2

เอกสารที่เกี่ยวข้อง

เอกสารที่เกี่ยวข้อง

การทำโครงงานคณิตศาสตร์ เรื่อง ทฤษฎีการหาพื้นที่ช่องว่างระหว่างวงกลมสามวง สัมผัสกัน โดยมีรัศมี r เท่ากัน ครั้งนี้ จะกล่าวถึงหัวข้อในการศึกษาค้นคว้าต่าง ๆ ดังนี้

2.1 ทฤษฎีสามเหลี่ยม

2.1.1 มุมภายในรูปสามเหลี่ยม

2.1.2 รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า

2.1.3 พื้นที่สามเหลี่ยมด้านเท่า

2.2 ทฤษฎีวงกลม

2.2.1 ความหมายและส่วนต่างๆของวงกลม

2.2.2 เซกเตอร์ (Sector)

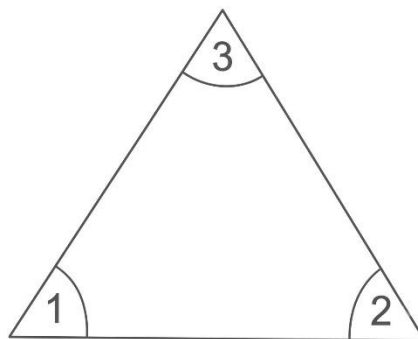
2.3 โปรแกรม The Geometer's sketchpad (GSP)

2.1 ทฤษฎีสามเหลี่ยม

2.1.1 มุมภายในรูปสามเหลี่ยม

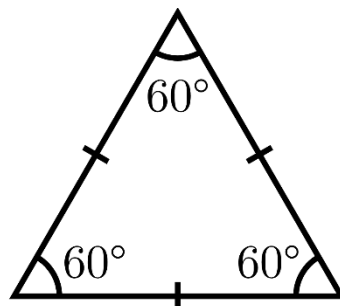
มุมภายในทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม รวมกันได้ 2 มุมฉาก หรือ 180°

$$\hat{1} + \hat{2} + \hat{3} = 180^\circ$$



ภาพที่ 1 มุมภายในทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม

2.1.2 รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า คือ ด้านทุกด้านจะมีความยาวเท่ากัน และมุมทุกมุมของสามเหลี่ยมมีขนาดเท่ากันคือ 60°



ภาพที่ 2 รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า

คุณสมบัติ

1. ด้านยาวเท่ากัน 3 ด้าน $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BC}$
2. มุมขนาดเท่ากัน 3 มุม คือ 60°

2.1.3 พื้นที่สามเหลี่ยมด้านเท่า

$$\text{พื้นที่สามเหลี่ยมด้านเท่า} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times (\text{ด้าน})^2$$

2.2 ทฤษฎีวงกลม

2.2.1 ความหมายและส่วนต่างๆของวงกลม

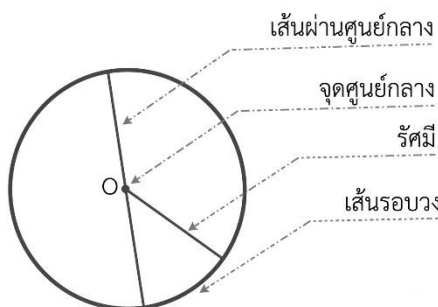
2.2.1.1 วงกลม คือ เซตของจุดทุกจุดบนระนาบซึ่งอยู่ห่างจากจุดคงที่จุดหนึ่งบนระนาบเดียวกัน เป็นระยะทางเท่าๆกัน

2.2.1.2 เส้นรอบวง คือ เซตของจุดที่ห่างจากจุดศูนย์กลางเป็นระยะทางเท่ากัน

2.2.1.3 จุดศูนย์กลางของวงกลม คือ จุดที่อยู่ตรงกลางวงกลมพอดี และห่างจากเส้นรอบวงเท่ากันโดยตลอด

2.2.1.4 รัศมี คือ ระยะจากจุดศูนย์กลางไปยังเส้นรอบวง

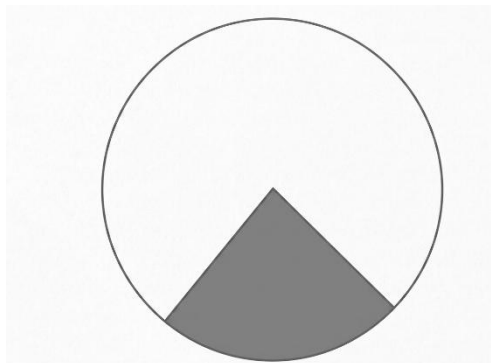
2.2.1.5 เส้นผ่านศูนย์กลาง คือ เส้นตรงที่ผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลมโดยที่ปลายทั้งสองจรดเส้นรอบวงพอดี



ภาพที่ 3 ความหมายและส่วนต่างๆของวงกลม

2.2.2 เชกเตอร์ (Sector)

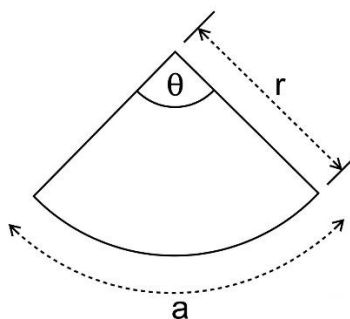
2.2.2.1 ความหมายของเชกเตอร์ คือ พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยรัศมีกับส่วนโค้งของวงกลมเดียวกัน



ภาพที่ 4 เชกเตอร์

2.2.2.2 พื้นที่เชกเตอร์

$$\text{พื้นที่เชกเตอร์} = \frac{\theta}{360^\circ} \cdot \pi r^2$$

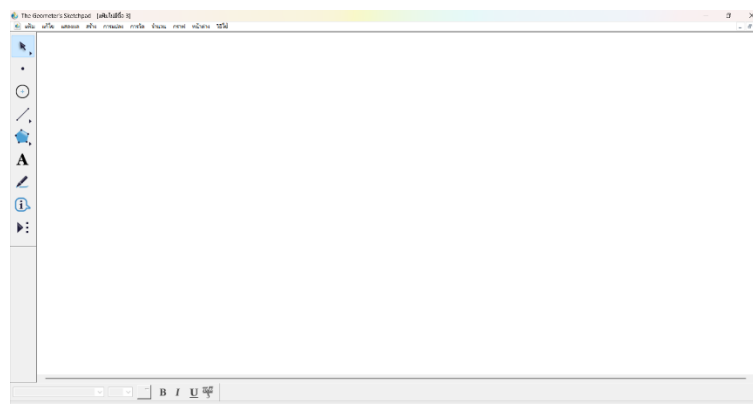


ภาพที่ 5 พื้นที่เชกเตอร์

2.3 โปรแกรม The Geometer's sketchpad (GSP)

โปรแกรม Geometer's Sketchpad (GSP) เป็นโปรแกรมคณิตศาสตร์ที่ผลิตจากประเทศสหรัฐอเมริกา เป็นโปรแกรมที่มีประสิทธิภาพโปรแกรมหนึ่ง สามารถนำไปใช้ในวิชาคณิตศาสตร์ได้หลายวิชา เช่น วิชาเรขาคณิตพีชคณิต ตรีโกณมิติ และแคลคูลัส โปรแกรม GSP เป็นสื่อ เทคโนโลยีที่ช่วยให้ผู้เรียน มีโอกาสเรียนคณิตศาสตร์โดยการสร้างองค์ความรู้ด้วยตนเอง (Constructivist Approach) และเป็นการเรียนโดยเน้นผู้เรียนเป็นสำคัญ (Learner - Centered Learning) โปรแกรม GSP เป็นสื่อที่ช่วยให้ผู้เรียนพัฒนาทักษะของการนึกภาพ (Visualization) ทักษะของกระบวนการแก้ปัญหา (Problem Solving Skills) นอกจากนี้การใช้โปรแกรม GSP

ในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์เป็นการบูรณาการสาระที่เกี่ยวข้องกับความรู้คณิตศาสตร์ และทักษะด้านเทคโนโลยีเข้าด้วยกัน



ภาพที่ 6 โปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP)

บทที่ 3

วิธีดำเนินการ

3.1 วิธีดำเนินการ

ในการจัดทำโครงการคณิตศาสตร์ เรื่อง ทฤษฎีการหาพื้นที่ช่องว่างระหว่างวงกลมสามวงสัมผัสกัน โดยมีรัศมี r เท่ากัน เพื่อศึกษาการหาพื้นที่ช่องว่างระหว่างวงกลมสามวงสัมผัสกัน โดยมีรัศมี r เท่ากัน คณะผู้จัดทำได้วางแผนและวิธีการดำเนินการ และกำหนดขั้นตอนการดำเนินการ คำนวณทางคณิตศาสตร์ไว้เป็นลำดับขั้นตอน เพื่อความถูกต้องแม่นยำในการพิสูจน์หลักการทางคณิตศาสตร์

3.2 ขั้นตอนการดำเนินการ

1. จัดตั้งกลุ่มโครงการคณิตศาสตร์ ซึ่งประกอบด้วยสมาชิก 3 คน แบ่งหน้าที่กับสมาชิกในกลุ่มและศึกษาหลักการในการหาพื้นที่ช่องว่างระหว่างวงกลมสามวงสัมผัสกัน โดยมีรัศมี r เท่ากัน

2. ศึกษาและรวบรวมเนื้อหาที่สามารถนำมาใช้ในการสร้างและพิสูจน์ทฤษฎีการหาพื้นที่ช่องว่างระหว่างวงกลมสามวงสัมผัสกัน โดยมีรัศมี r เท่ากัน

3. สร้างและพิสูจน์ทฤษฎีการหาพื้นที่ช่องว่างระหว่างวงกลมสามวงสัมผัสกัน โดยมีรัศมี r เท่ากัน

3.1 หาพื้นที่สามเหลี่ยมด้านเท่า

3.1.1 สร้างรูปเพื่อใช้ในการพิสูจน์

3.1.2 ความยาวด้านของของสามเหลี่ยมด้านเท่า ABC

3.1.3 พื้นที่สามเหลี่ยมด้านเท่า

3.2 หาพื้นที่เซกเตอร์

3.2.1 สร้างรูปเพื่อใช้ในการพิสูจน์

3.2.2 ทฤษฎีมุมภายในรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า

3.2.3 หาพื้นที่เซกเตอร์

3.2.4 พื้นที่เซกเตอร์ทั้งหมด = พื้นที่เซกเตอร์วงกลม B + พื้นที่เซกเตอร์วงกลม A
+ พื้นที่เซกเตอร์วงกลม C

3.3 หาพื้นที่ช่องว่างระหว่างวงกลมสามวงกลมสัมผัสกัน

3.3.1 $A_1 =$ พื้นที่สามเหลี่ยมด้านเท่า – พื้นที่เซกเตอร์ทั้งหมด

4. จัดทำเค้าโครงโครงการและนำไปปรึกษาต่อครูที่ปรึกษาโครงการ เพื่อนำคำแนะนำและข้อเสนอแนะไปปรับใช้ในการจัดทำโครงการ

5. สรุปผลการดำเนินการ ประชุมอภิปรายผลการดำเนินการ รวมถึงปัญหาต่าง ๆ
ร่วมกับครูที่ปรึกษาโครงการ เพื่อนำคำแนะนำขอความคิดเห็นข้อเสนอแนะนำไปปรับปรุงแก้ไข
6. ตรวจสอบความถูกต้อง ความสมบูรณ์ของโครงการ และจัดพิมพ์เล่มโครงการ

บทที่ 4

ผลการดำเนินการ

จากผลการดำเนินการโครงงานคณิตศาสตร์ เรื่อง ทฤษฎีการหาพื้นที่ช่องว่างระหว่างวงกลมสามวงสัมผัสกัน โดยมีรัศมี r เท่ากัน โดยคณะผู้จัดทำมีผลการดำเนินการตามวัตถุประสงค์ต่อไปนี้

ผลการดำเนินการตามวัตถุประสงค์ ข้อที่ 1 เพื่อศึกษาทฤษฎีการหาพื้นที่ช่องว่างระหว่างวงกลมสามวงสัมผัสกัน โดยมีรัศมี r เท่ากัน

$$A_1 = \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right)r^2$$

เมื่อ A_1 แทน พื้นที่ช่องว่างระหว่างวงกลมสามวงสัมผัสกัน (ตารางหน่วย)

r แทน ความยาวของรัศมีของวงกลม (หน่วย)

1. หาพื้นที่สามเหลี่ยมด้านเท่า

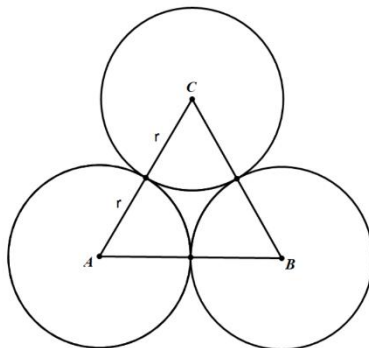
1.1 สร้างรูปเพื่อใช้ในการพิสูจน์ โดยใช้โปรแกรม GSP

1.1.1 วาดวงกลมสามวงที่สัมผัสกันที่มีจุดศูนย์กลาง A, B, C

1.1.2 กำหนดวงกลม A, B และ C มีรัศมี r หน่วย

1.1.3 สร้าง $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ และ $\overline{CA}$

1.1.4 จะได้รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า ABC



ภาพที่ 7 รูปเพื่อใช้ในการพิสูจน์ทฤษฎีการหาพื้นที่ช่องว่างระหว่างวงกลมสามวงสัมผัสกัน โดยมีรัศมี r เท่ากัน

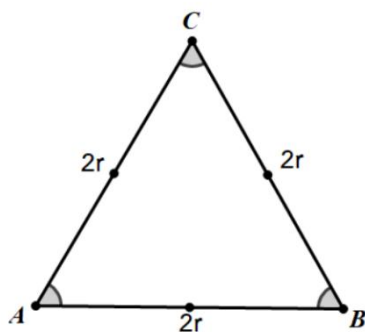
1.2 ความยาวด้านของของสามเหลี่ยมด้านเท่า ABC

$$1.2.1 \overline{AB} = 2r$$

$$\overline{BC} = 2r$$

$$\overline{CA} = 2r$$

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC}$$



ภาพที่ 8 ความยาวด้านของของสามเหลี่ยมด้านเท่า ABC

1.3 หาพื้นที่สามเหลี่ยมด้านเท่า

$$1.3.1 \text{ จากสูตรพื้นที่สามเหลี่ยมด้านเท่า} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times (\text{ด้าน})^2$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \times (2r)^2$$

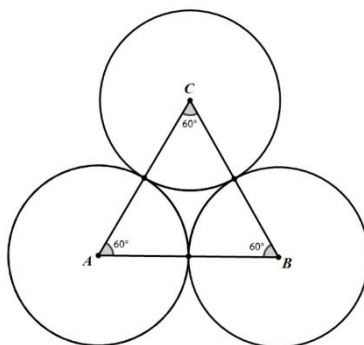
$$\text{จะได้พื้นที่สามเหลี่ยมด้านเท่า} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 4r^2$$

$$= \sqrt{3}r^2 \text{ ตารางหน่วย}$$

2. หาพื้นที่เชกเตอร์

2.1 สร้างรูปเพื่อใช้ในการพิสูจน์ โดยใช้โปรแกรม GSP

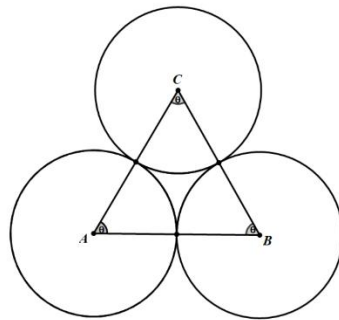
$$2.1.1 \text{ กำหนด } \widehat{ABC} = \widehat{BCA} = \widehat{BAC} = 60^\circ$$



ภาพที่ 9 รูปเพื่อใช้ในการพิสูจน์พื้นที่เชกเตอร์

2.2 จากทฤษฎีมุมภายในรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า

2.2.1 มุมภายในรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า = 180°



ภาพที่ 10 การหามุมภายในของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า

$$\text{เนื่องจาก } \hat{ABC} + \hat{BCA} + \hat{BAC} = 180^\circ$$

$$3\theta = 180^\circ$$

$$\theta = \frac{180^\circ}{3}$$

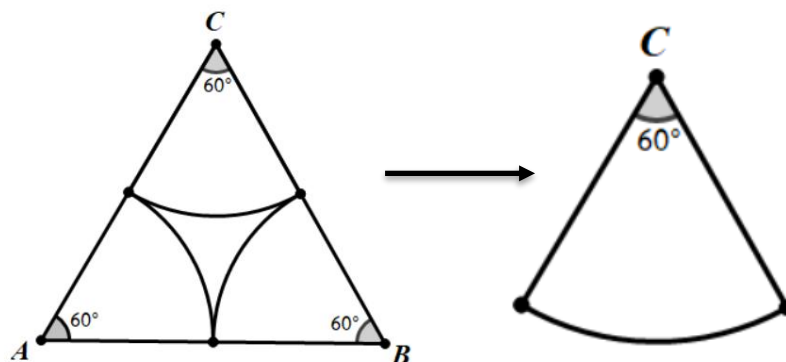
$$\text{จะได้ } \theta = 60^\circ$$

2.3 หาพื้นที่เซกเตอร์

$$2.3.1 \text{ พื้นที่เซกเตอร์} = \frac{\theta}{360^\circ} \pi r^2$$

$$\text{เนื่องจาก } \hat{BCA} = 60^\circ$$

$$\theta = 60^\circ$$



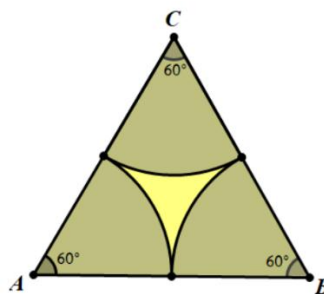
ภาพที่ 11 พื้นที่เซกเตอร์วงกลม

$$\begin{aligned} \text{จะได้พื้นที่เซกเตอร์วงกลม } C &= \frac{\theta}{360^\circ} \pi r^2 \\ &= \frac{60^\circ}{360^\circ} \pi r^2 \\ &= \frac{1}{6} \pi r^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{พื้นที่เซกเตอร์ทั้งหมด} &= \text{พื้นที่เซกเตอร์วงกลม A} + \text{พื้นที่เซกเตอร์วงกลม B} + \\
 &\quad \text{พื้นที่เซกเตอร์วงกลม C} \\
 &= 3 \text{ พื้นที่เซกเตอร์วงกลม C} \\
 &= 3\left(\frac{1}{6}\pi r^2\right) \\
 \text{จะได้พื้นที่เซกเตอร์ทั้งหมด} &= \frac{\pi r^2}{2}
 \end{aligned}$$

3. หาพื้นที่ช่องว่างระหว่างวงกลมสามวงสัมผัสกัน

3.1 กำหนดให้ A_1 แทนพื้นที่ช่องว่างระหว่างวงกลมสามวงสัมผัสกัน



ภาพที่ 12 พื้นที่ช่องว่างระหว่างวงกลมสามวงสัมผัสกัน

เนื่องจาก A_1 = พื้นที่สามเหลี่ยมด้านเท่า - พื้นที่เซกเตอร์ทั้งหมด

$$= \sqrt{3}r^2 - \frac{\pi r^2}{2}$$

$$\text{จะได้ } A_1 = \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right)r^2 \quad (\text{ดึงตัวร่วม})$$

ตารางที่ 1 การเปรียบเทียบการหาพื้นที่ช่องว่างระหว่างวงกลมสามวงสัมผัสกัน โดยมีรัศมี r เท่ากัน จากสูตรและโปรแกรม The Geometer's Sketchpad

รัศมี r หน่วย	พื้นที่ช่องว่างระหว่างวงกลมสามวงสัมผัสกันจากสูตร	พื้นที่ช่องว่างระหว่างวงกลมสามวงสัมผัสกันจากโปรแกรม GSP
1	$\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right)(1)^2 = 0.16125$	0.16125
2	$\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right)(2)^2 = 0.64502$	0.64502
3	$\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right)(3)^2 = 1.45129$	1.45129
4	$\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right)(4)^2 = 2.58007$	2.58007
5	$\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right)(5)^2 = 4.03136$	4.03136

บทที่ 5

สรุป อภิปราย และข้อเสนอแนะ

จากทฤษฎีการหาพื้นที่ช่องว่างระหว่างวงกลมสามวงสัมผัสกัน โดยมีรัศมี r เท่ากัน ผู้จัดทำได้สรุปผลการดำเนินการศึกษา ดังนี้

5.1 สรุปผล

5.2 อภิปรายผล

5.3 ประโยชน์ที่ได้รับ

5.4 ข้อเสนอแนะ

5.1 สรุปผล

ทฤษฎีการหาพื้นที่ช่องว่างระหว่างวงกลมสามวงสัมผัสกัน โดยมีรัศมี r เท่ากัน ได้ผลการดำเนินการตามวัตถุประสงค์ ดังนี้

1. เพื่อศึกษาทฤษฎีการหาพื้นที่ช่องว่างระหว่างวงกลมสามวงสัมผัสกัน โดยมีรัศมี r เท่ากัน

$$A_1 = \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right)r^2$$

เมื่อ A_1 แทน พื้นที่ช่องว่างระหว่างวงกลมสามวงสัมผัสกัน (ตารางหน่วย)

r แทน ความยาวของรัศมีของวงกลม (หน่วย)

5.2 อภิปรายผล

ผลการพิสูจน์พบว่าทฤษฎีการหาพื้นที่ช่องว่างระหว่างวงกลมสามวงสัมผัสกัน โดยมีรัศมี r เท่ากัน มีค่าเท่ากับ $A_1 = \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right)r^2$ ซึ่งสอดคล้องกับสมมติฐานที่ตั้งไว้ สอดคล้องกับสมบัติพื้นฐานของพื้นที่ทางเรขาคณิต ทั้งนี้พื้นที่ดังกล่าวแปรผันตรงกับ r^2 ดังที่ระบุไว้ในสมมติฐานเบื้องต้น ซึ่งสอดคล้องกับหลักการวิเคราะห์เชิงมิติที่ว่าพื้นที่ต้องมีหน่วยเป็นตารางหน่วย

ความสำเร็จของการพิสูจน์เกิดจากการบูรณาการสมบัติของสามเหลี่ยมด้านเท่า (มุมภายใน 60°) เข้ากับสูตรพื้นที่เซกเตอร์ของวงกลม แสดงให้เห็นความเชื่อมโยงระหว่างเนื้อหาคณิตศาสตร์ต่างสาขา นอกจากนี้ผลลัพธ์จากสูตรยังได้รับการตรวจสอบความแม่นยำโดยเปรียบเทียบกับผลจากโปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP) ที่ค่ารัศมี $r = 1, 2, 3, 4$ และ 5 หน่วย ซึ่งพบว่าให้ผลลัพธ์ตรงกันทุกกรณี ยืนยันความถูกต้องของทฤษฎีที่พิสูจน์ได้

5.3 ประโยชน์ที่ได้รับ

5.3.1 ได้ทฤษฎีการคำนวณหาพื้นที่ช่องว่างระหว่างวงกลมสามวงที่สัมผัสกัน โดยมีรัศมี r เท่ากัน

5.3.2 นำความรู้ไปประยุกต์ใช้ในการคำนวณพื้นที่ช่องว่างของการจัดเรียงวัตถุทรงกลม เช่น การบรรจุภัณฑ์ หรือการจัดเรียงท่อ เป็นต้น

5.4 ข้อเสนอแนะ

5.4.1 ข้อเสนอแนะในการนำไปใช้ประโยชน์

ทฤษฎีที่ได้จากการศึกษาครั้งนี้สามารถนำไปประยุกต์ใช้ในหน่วยงานหรือธุรกิจที่เกี่ยวข้องกับการออกแบบบรรจุภัณฑ์ การจัดเรียงท่อหรือสายเคเบิลเป็นกลุ่มสามเส้น เพื่อประเมินประสิทธิภาพการใช้พื้นที่และลดการสูญเสียทรัพยากรในสถานการณ์จริง

5.4.2 ข้อเสนอแนะในการศึกษาครั้งต่อไป

5.4.2.1 ควรศึกษาการหาพื้นที่ช่องว่างในกรณีที่วงกลมมีจำนวนมากกว่าสามวง เช่น การเรียงวงกลมสี่วงหรือมากกว่า ทั้งในลักษณะเรียงเป็นแถวและเรียงเป็นกลุ่ม

5.4.2.2 ควรศึกษากรณีที่วงกลมแต่ละวงมีรัศมีไม่เท่ากัน ซึ่งจุดศูนย์กลางจะไม่เรียงเป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า จำเป็นต้องอาศัยวิธีการพิสูจน์ที่ซับซ้อนขึ้น

บรรณานุกรม

- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2561). *คณิตศาสตร์ เล่ม 2*
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3. โรงพิมพ์ สกสค.
- สุพรรณทิพย์ อติโพธิ, และวัฒน สุทธิจิริมงคล. (2562). *SUPER MATHS* สรุป
คณิตศาสตร์ มัธยมต้น (พิมพ์ครั้งที่ 6). ไฮเทค พรินติ้ง.
- เสรี สุขโยธิน. (2553, 16 สิงหาคม). *ประวัติของโปรแกรม GSP (รู้หน่อยก็ดีนะ)*.
 GotoKnow. <https://www.gotoknow.org/posts/385375>
- ATHOMETH. (2565). *โน้ตสรุป รูปร่างมีกี่มิติ พร้อมสูตร*. <https://www.athometh.com/math/how-many-dimensions-does-a-shape-have/>

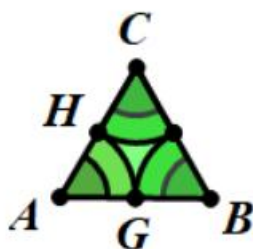
ภาคผนวก

การหาพื้นที่ช่องว่างระหว่างวงกลมสามวงสัมผัสกัน โดยมีรัศมี r เท่ากัน

ตัวอย่าง รัศมี = 1 เซนติเมตร

ภาพจากโปรแกรม GSP

$$\text{รัศมี} = \boxed{1.00} \text{ ซม.}$$



$$\left(\sqrt{3} - \left(\frac{\pi}{2} \right) \right) \cdot (1)^2 = 0.16125$$

$$\text{พื้นที่ } \triangle CAB = 1.73205 \text{ ซม.}^2$$

$$\text{พื้นที่ } \widehat{GH} = 0.52360 \text{ ซม.}^2$$

$$(\text{พื้นที่ } \triangle CAB) - 3 \cdot (\text{พื้นที่ } \widehat{GH}) = 0.16125 \text{ ซม.}^2$$

ซึ่งจากสูตรจะได้ว่า

กำหนดให้ A_1 แทนพื้นที่ช่องว่างระหว่างวงกลมสามวงสัมผัสกัน

$$A_1 = \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2} \right) (1)^2$$

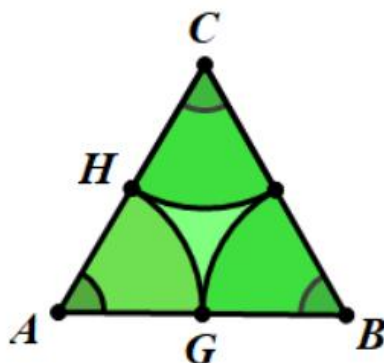
$$= 0.16125 \quad \text{ตารางเซนติเมตร}$$

การหาพื้นที่ช่องว่างระหว่างวงกลมสามวงสัมผัสกัน โดยมีรัศมี r เท่ากัน

ตัวอย่าง รัศมี = 2 เซนติเมตร

ภาพจากโปรแกรม GSP

รัศมี = 2.00 ซม.



$$\left(\sqrt{3} - \left(\frac{\pi}{2} \right) \right) \cdot (2)^2 = 0.64502$$

$$\text{พื้นที่ } \triangle CAB = 6.92820 \text{ ซม.}^2$$

$$\text{พื้นที่ } \widehat{GH} = 2.09440 \text{ ซม.}^2$$

$$(\text{พื้นที่ } \triangle CAB) - 3 \cdot (\text{พื้นที่ } \widehat{GH}) = 0.64502 \text{ ซม.}^2$$

ซึ่งจากสูตรจะได้ว่า

กำหนดให้ A_1 แทนพื้นที่ช่องว่างระหว่างวงกลมสามวงสัมผัสกัน

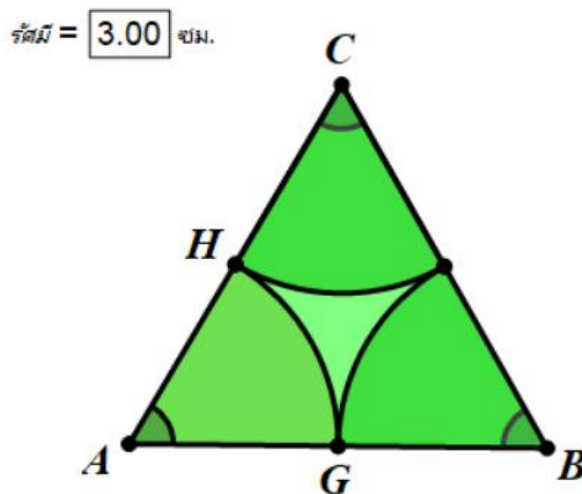
$$A_1 = \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2} \right) (2)^2$$

$$= 0.64502 \quad \text{ตารางเซนติเมตร}$$

การหาพื้นที่ช่องว่างระหว่างวงกลมสามวงสัมผัสกัน โดยมีรัศมี r เท่ากัน

ตัวอย่าง รัศมี = 3 เซนติเมตร

ภาพจากโปรแกรม GSP



$$\left(\sqrt{3} - \left(\frac{\pi}{2} \right) \right) \cdot (3)^2 = 1.45129$$

$$\text{พื้นที่ } \triangle CAB = 15.58846 \text{ ซม.}^2$$

$$\text{พื้นที่ } \widehat{GH} = 4.71239 \text{ ซม.}^2$$

$$(\text{พื้นที่ } \triangle CAB) - 3 \cdot (\text{พื้นที่ } \widehat{GH}) = 1.45129 \text{ ซม.}^2$$

ซึ่งจากสูตรจะได้ว่า

กำหนดให้ A_1 แทนพื้นที่ช่องว่างระหว่างวงกลมสามวงกลมสัมผัสกัน

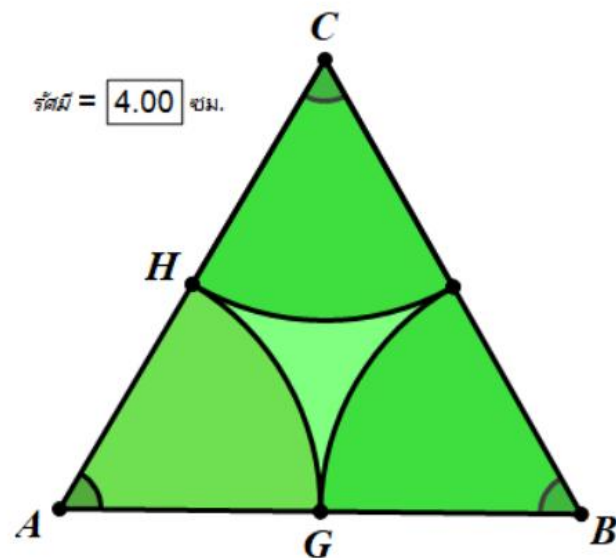
$$A_1 = \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2} \right) (3)^2$$

$$= 1.45129 \quad \text{ตารางเซนติเมตร}$$

การหาพื้นที่ช่องว่างระหว่างวงกลมสามวงสัมผัสกัน โดยมีรัศมี r เท่ากัน

ตัวอย่าง รัศมี = 4 เซนติเมตร

ภาพจากโปรแกรม GSP



$$\left(\sqrt{3} - \left(\frac{\pi}{2} \right) \right) \cdot (4)^2 = 2.58007$$

$$\text{พื้นที่ } \triangle CAB = 27.71281 \text{ ซม.}^2$$

$$\text{พื้นที่ } \widehat{GH} = 8.37758 \text{ ซม.}^2$$

$$(\text{พื้นที่ } \triangle CAB) - 3 \cdot (\text{พื้นที่ } \widehat{GH}) = 2.58007 \text{ ซม.}^2$$

ซึ่งจากสูตรจะได้ว่า

กำหนดให้ A_1 แทนพื้นที่ช่องว่างระหว่างวงกลมสามวงกลมสัมผัสกัน

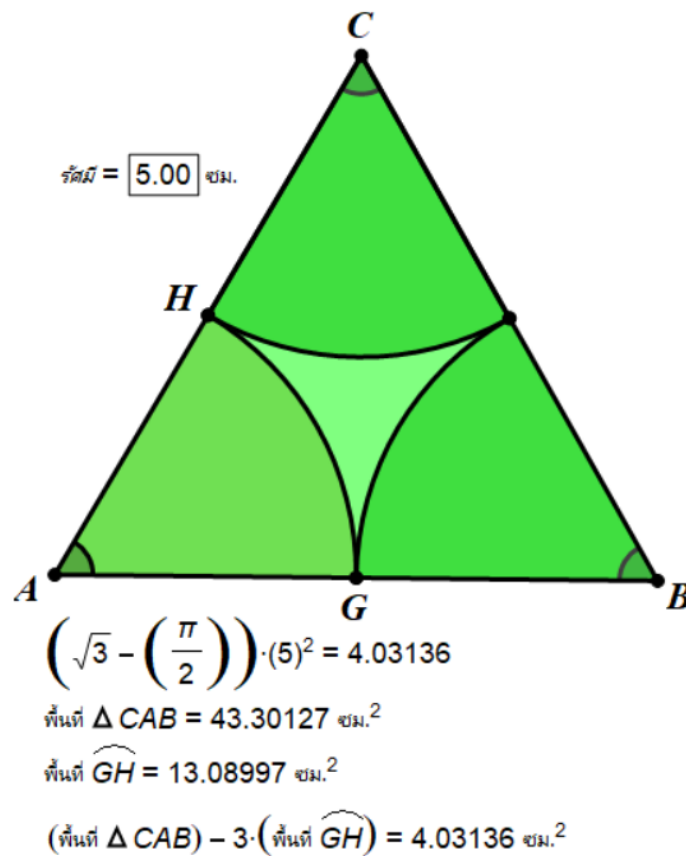
$$A_1 = \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2} \right) (4)^2$$

$$= 2.58007 \quad \text{ตารางเซนติเมตร}$$

การหาพื้นที่ช่องว่างระหว่างวงกลมสามวงสัมผัสกัน โดยมีรัศมี r เท่ากัน

ตัวอย่าง รัศมี = 5 เซนติเมตร

ภาพจากโปรแกรม GSP



ซึ่งจากสูตรจะได้ว่า

กำหนดให้ A_1 แทนพื้นที่ช่องว่างระหว่างวงกลมสามวงสัมผัสกัน

$$A_1 = \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2} \right) (5)^2$$

$$= 4.03136 \quad \text{ตารางเซนติเมตร}$$