

โครงการคณิตศาสตร์

เรื่อง การออกแบบบรรจุภัณฑ์จากทรงกลมตัด

โดย

- | | |
|---------------------|---------------|
| 1. เด็กหญิงชญญาวีร์ | สว่าง |
| 2. เด็กหญิงณัฏชา | ไกรนที |
| 3. นางสาววิศรา | คูศิริวานิชกร |

ครูที่ปรึกษาโครงการ

- | | |
|------------------|----------|
| 1. นายเปรมอนันต์ | เจือกโวน |
| 2. นางปรารธนา | หยงสตาร์ |

โรงเรียนสภาราชินี จังหวัดตรัง สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษาตรัง กระบี่

รายงานฉบับนี้เป็นส่วนประกอบของโครงการคณิตศาสตร์
ประเภทบูรณาการ ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น

เนื่องในงานสัปดาห์วิทยาศาสตร์แห่งชาติส่วนภูมิภาค ประจำปี พ.ศ. 2569
ณ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏสุราษฎร์ธานี

ชื่อผู้จัดทำ เด็กหญิงชญาวีร์ สว่าง
เด็กหญิงณัฏฐา ไกรนที
นางสาววิศรา คูศิริวานิชกร

ชื่อครูที่ปรึกษา นางปรารถนา หยงสตาร์
นายเปรมอนันต์ เจือกโวน์

สถานศึกษา โรงเรียนสมภาราชนี จังหวัดตรัง

บทคัดย่อ

โครงงานคณิตศาสตร์ เรื่อง การออกแบบบรรจุภัณฑ์จากทรงกลมตัด มีวัตถุประสงค์เพื่อออกแบบบรรจุภัณฑ์ทรงกลมตัด และเปรียบเทียบพื้นที่ผิวของบรรจุภัณฑ์ทรงกลมตัดทั้ง 4 รูปแบบ โดยมีการออกแบบบรรจุภัณฑ์ 4 รูปแบบ ได้แก่ 1. ครึ่งทรงกลม 2. ทรงกลมตัดที่มีความสูงของฝาทรงกลมเป็น $\frac{3}{4}$ ของรัศมีทรงกลม 3. ทรงกลมตัดที่มีความสูงของฝาทรงกลมเป็น $\frac{2}{3}$ ของรัศมีทรงกลม และ 4. ทรงกลมตัดที่มีความสูงของฝาทรงกลมเป็น $\frac{1}{2}$ ของรัศมีทรงกลม มีการควบคุมความสูงของฝาบรรจุภัณฑ์เท่ากับ $\frac{1}{4}$ ของรัศมีทรงกลม และควบคุมปริมาตรเท่ากับ 300 มิลลิลิตร จากนั้นคำนวณหารัศมีทรงกลม รัศมีฐานของทรงกลมตัด ความสูงของทรงกลมตัด และพื้นที่ผิวของบรรจุภัณฑ์ทรงกลมตัดทั้ง 4 รูปแบบ ใช้โปรแกรม GeoGebra ในการสร้างต้นแบบบรรจุภัณฑ์ทั้ง 4 รูปแบบ และใช้ 3D printer สร้างโมเดลบรรจุภัณฑ์รูปแบบที่มีพื้นที่ผิวน้อยที่สุด

ผลการศึกษาพบว่า รูปแบบที่ 4 ทรงกลมตัดที่มีความสูงของฝาทรงกลมเป็น $\frac{1}{2}$ ของรัศมีทรงกลม มีพื้นที่ผิวน้อยที่สุด และรูปแบบที่ 1 ครึ่งทรงกลม มีพื้นที่ผิวมากที่สุด แสดงให้เห็นว่าพื้นที่ผิวของบรรจุภัณฑ์ทรงกลมตัดลดลงเมื่อความสูงของฝาทรงกลมลดลง

กิตติกรรมประกาศ

โครงการคณิตศาสตร์ เรื่อง การออกแบบบรรจุภัณฑ์จากทรงกลมตัด ซึ่งประกอบด้วย การดำเนินงานหลายขั้นตอน นับตั้งแต่การศึกษาหาข้อมูล การดำเนินงาน การวิเคราะห์ข้อมูลต่างๆ รวมถึงผลการทดลอง และการจัดทำโครงการเป็นรูปเล่ม จนกระทั่งโครงการนี้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี ตลอดระยะเวลาดังกล่าว คณะผู้จัดทำได้รับความช่วยเหลือและคำแนะนำในด้านต่าง ๆ ตลอดจน ได้รับกำลังใจจากบุคคลหลายท่าน คณะผู้จัดทำจึงตระหนักและซาบซึ้งในความกรุณาจากทุกท่าน เป็นอย่างยิ่ง ณ โอกาสนี้ขอขอบคุณทุกท่านดังนี้

ขอขอบพระคุณ คุณครูปรารณา หยงสตาร์ และ คุณครูเปรมอนันต์ เจือกโวัน ครูที่ปรึกษาโครงการ ผู้ให้คำแนะนำ ให้ความช่วยเหลือ และให้คำปรึกษาเป็นอย่างดี และครูกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ทุกท่านรวมถึงเพื่อน ๆ ทุกคนที่คอยให้กำลังใจ และให้โอกาสการศึกษาอันมีค่าอย่างยิ่ง

สุดท้ายนี้ ขอขอบพระคุณ คณะผู้บริหาร โรงเรียนสภาราชินี จังหวัดตรังทุกท่านที่ให้การสนับสนุนในการดำเนินงานศึกษาโครงการในครั้งนี้ คณะผู้จัดทำหวังเป็นอย่างยิ่งว่าโครงการฉบับนี้จะเป็นประโยชน์ต่อผู้ที่สนใจในการประยุกต์ใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ในการออกแบบสิ่งของต่างๆ และหากมีข้อผิดพลาดประการใด คณะผู้จัดทำขอน้อมรับ และขออภัยไว้ ณ โอกาสนี้

คณะผู้จัดทำ

สารบัญ

เรื่อง	หน้า
บทคัดย่อ	ก
กิตติกรรมประกาศ	ข
สารบัญ	ค
สารบัญตาราง	ง
สารบัญภาพ	จ
บทที่ 1 บทนำ	
ที่มาและความสำคัญ	1
วัตถุประสงค์	1
นิยามศัพท์เฉพาะ	2
ผลที่คาดว่าจะได้รับ	2
ขอบเขตของการดำเนินงาน	2
ตัวแปรที่ศึกษา	3
บทที่ 2 เอกสารที่เกี่ยวข้อง	4
บทที่ 3 วิธีการดำเนินงาน	9
บทที่ 4 ผลการดำเนินงาน	18
บทที่ 5 สรุป อภิปราย และข้อเสนอแนะ	19
บรรณานุกรม	21
ภาคผนวก	22

สารบัญตาราง

ตารางที่	หน้า
1	แผนการปฏิบัติงาน
2	องค์ประกอบของบรรจุภัณฑ์ทรงกลมตัดทั้ง 4 รูปแบบ
3	สัดส่วน ปริมาตร และพื้นที่ผิวของบรรจุภัณฑ์ทรงกลมตัดทั้ง 4 รูปแบบ

สารบัญภาพ

ภาพที่	หน้า
1 ทรงกลม	4
2 ฝาทรงกลม (Spherical Cap)	5
3 ทรงกลมตัด	6
4 ทฤษฎีบทพีทาโกรัส	7
5 รูปตัดขวาง	7
6 Flowchart วิธีการดำเนินงาน	10
7 บรรจุภัณฑ์รูปแบบที่ 1	11
8 บรรจุภัณฑ์รูปแบบที่ 2	12
9 บรรจุภัณฑ์รูปแบบที่ 3	12
10 บรรจุภัณฑ์รูปแบบที่ 4	13
11 บรรจุภัณฑ์	15
12 โมเดลบรรจุภัณฑ์รูปแบบที่ 4	18

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ที่มาและความสำคัญ

ในทางเรขาคณิตและวิศวกรรมการออกแบบ ทรงกลม (Sphere) ถือเป็นรูปทรงที่มีความสมบูรณ์แบบในด้านสุนทรียภาพ ให้ความรู้สึกที่สมดุลและนุ่มนวล อย่างไรก็ตามในการประยุกต์ใช้เชิงอุตสาหกรรม ทรงกลมมีข้อจำกัดด้านเสถียรภาพเนื่องจากไม่มีพื้นราบสำหรับการตั้งวาง ดังนั้น การใช้หลักการทรงกลมตัด จึงเข้ามามีบทบาทสำคัญในการแก้ปัญหานี้ โดยเป็นการนำระนาบมาตัดส่วนหนึ่งของทรงกลมออก เพื่อสร้างฐานที่มั่นคงของบรรจุภัณฑ์ โดยที่ยังคงรักษาเอกลักษณ์ความโค้งมนที่เป็นจุดเด่นทางด้านทัศนศิลป์เอาไว้ การออกแบบบรรจุภัณฑ์โดยใช้รูปทรงกลมตัดนั้น จำเป็นต้องอาศัยการคำนวณสัดส่วนทางคณิตศาสตร์ที่แม่นยำ เพื่อควบคุมตัวแปรสำคัญ 2 ประการ คือ ปริมาตร (Volume) และพื้นที่ผิว (Surface Area)

วัฒนธรรมการบริโภคอาหารของสังคมไทย เครื่องปรุงรสถือเป็นองค์ประกอบสำคัญที่ช่วยให้อาหารมีรสชาติที่กลมกล่อมมากขึ้น สะท้อนถึงภูมิปัญญาและเอกลักษณ์ทางวัฒนธรรมด้านอาหารของคนไทยในแต่ละบุคคล โดยเฉพาะอย่างยิ่งเครื่องปรุงประเภทน้ำปลาพริกหรือซีอิ๊วพริก จากประสบการณ์การคลุกคลีกับธุรกิจการผลิตซีอิ๊วของครอบครัว ผู้จัดทำได้สังเกตการใช้งานบรรจุภัณฑ์เครื่องปรุงในบริบทจริง พบว่าบรรจุภัณฑ์เครื่องปรุงส่วนใหญ่ที่ใช้งานจริงในปัจจุบันยังมีข้อจำกัดเรื่องการออกแบบที่ไม่สอดคล้องกับการลดต้นทุนวัสดุ มักมีการใช้วัสดุฟุ่มเฟือย หรือรูปทรงที่ไม่เอื้อต่อการขนส่งในปริมาณมาก

ด้วยเหตุนี้ ผู้จัดทำจึงเกิดแนวความคิดในการออกแบบบรรจุภัณฑ์เครื่องปรุงรสทรงกลมตัด โดยมุ่งเน้นการคำนวณสัดส่วนทางคณิตศาสตร์อย่างเป็นระบบ เพื่อสร้างนวัตกรรมบรรจุภัณฑ์ที่ให้ความสำคัญสูงสุดกับการลดต้นทุนการผลิตและประหยัดทรัพยากรวัสดุ โดยยังคงตอบโจทย์ด้านความสวยงามทางศิลปะ และฟังก์ชันการใช้งานที่มีประสิทธิภาพ ถือเป็นการสร้างความแตกต่างและความได้เปรียบทางการแข่งขันในเชิงธุรกิจอย่างยั่งยืน

1.2 วัตถุประสงค์

1.2.1 เพื่อออกแบบบรรจุภัณฑ์ทรงกลมตัด

1.2.2 เพื่อเปรียบเทียบพื้นที่ผิวของบรรจุภัณฑ์ทรงกลมตัดทั้ง 4 รูปแบบ

1.3 นิยามศัพท์เฉพาะ

1.3.1 ทรงกลม (Sphere) คือ รูปเรขาคณิตสามมิติที่มีผิวโค้งเรียบ และจุดทุกจุดบนผิวโค้งอยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางเป็นระยะเท่ากัน

1.3.2 ฝาทรงกลม (Spherical Cap) คือ ส่วนหนึ่งของทรงกลมที่เกิดจากการตัดทรงกลมด้วยระนาบ ทำให้ได้ผิวโค้งคล้ายซามหรือฝาคาบ

1.3.3 ทรงกลมตัด คือ ส่วนของทรงกลมที่เกิดจากการตัดออกด้วยฝาทรงกลม ซึ่งมีลักษณะเป็นทรงกลม ที่ถูกตัดปลายออกไปด้านหนึ่ง ทำให้หน้าตัดเป็นรูปวงกลม

1.3.4 รัศมี คือ ส่วนของเส้นตรงใด ๆ ที่เชื่อมต่อระหว่างจุดศูนย์กลางไปยังเส้นรอบวง หรือพื้นผิวของทรงกลม

1.3.5 ความสูงของยอดตัด คือ ระยะทางตั้งฉากจากระนาบที่ตัดทรงกลม ถึงจุดบนผิวโค้งของทรงกลม

1.3.6 พื้นที่ผิวโค้งของยอดตัด คือ พื้นที่ของผิวโค้งส่วนที่เหลือหลังจากการตัดทรงกลม

1.3.7 ปริมาตรของยอดตัด คือ ปริมาตรของชิ้นส่วนที่ได้จากการตัดทรงกลม

1.4 ผลที่คาดว่าจะได้รับ

ต้นแบบบรรจุภัณฑ์ทรงกลมตัดที่มีพื้นที่ผิวน้อยที่สุด

1.5 ขอบเขตของการดำเนินงาน

ออกแบบบรรจุภัณฑ์ 4 รูปแบบ ดังนี้

1.5.1 รูปแบบที่ 1 ครึ่งทรงกลม

1.5.2 รูปแบบที่ 2 ทรงกลมตัดที่มีความสูงของฝาทรงกลมเป็น $\frac{3}{4}$ ของรัศมีทรงกลม

1.5.3 รูปแบบที่ 3 ทรงกลมตัดที่มีความสูงของฝาทรงกลมเป็น $\frac{2}{3}$ ของรัศมีทรงกลม

1.5.4 รูปแบบที่ 4 ทรงกลมตัดที่มีความสูงของฝาทรงกลมเป็น $\frac{1}{2}$ ของรัศมีทรงกลม

1.6 ตัวแปรที่ศึกษา

ตัวแปรต้น คือ รูปแบบของบรรจุภัณฑ์ทรงกลมตัดจำนวน 4 รูปแบบดังนี้

รูปแบบที่ 1 ครึ่งทรงกลม

รูปแบบที่ 2 ทรงกลมตัดที่มีความสูงของฝาทรงกลมเป็น $\frac{3}{4}$ ของรัศมีทรงกลม

รูปแบบที่ 3 ทรงกลมตัดที่มีความสูงของฝาทรงกลมเป็น $\frac{2}{3}$ ของรัศมีทรงกลม

รูปแบบที่ 4 ทรงกลมตัดที่มีความสูงของฝาทรงกลมเป็น $\frac{1}{2}$ ของรัศมีทรงกลม

ตัวแปรตาม คือ พื้นที่ผิวของทรงกลมตัด

ตัวแปรควบคุม คือ ปริมาตรของบรรจุภัณฑ์ทรงกลมตัด สัดส่วนความสูงของฝาบรรจุภัณฑ์

บทที่ 2

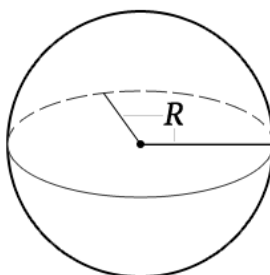
เอกสารที่เกี่ยวข้อง

การทำโครงงานคณิตศาสตร์ เรื่อง การออกแบบบรรจุภัณฑ์จากทรงกลมตัด สมาชิกในกลุ่มได้ศึกษาเอกสารดังต่อไปนี้

- 2.1 ทรงกลม (Sphere)
- 2.2 ฝาทรงกลม (Spherical Cap)
- 2.3 ทรงกลมตัด
- 2.4 ทฤษฎีบทพีทาโกรัส

2.1 ทรงกลม (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, 2563)

ทรงกลม (Sphere) คือ รูปเรขาคณิตสามมิติที่มีด้านข้างเป็นผิวโค้งเรียบ และจุดทุกจุดบนผิวโค้งอยู่ห่าง จากจุดคงที่จุดหนึ่งเป็นระยะเท่ากัน เรียกจุดคงที่ว่า จุดศูนย์กลางของทรงกลม เรียก ระยะที่เท่ากันว่า รัศมีของทรงกลม (Sphere, Wolfram MathWorld)



ภาพที่ 1 ทรงกลม (Sphere)

กำหนดให้

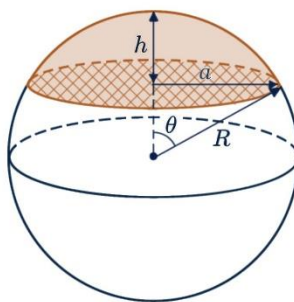
R แทน รัศมีของทรงกลม

$$\text{พื้นที่ผิว} = 4\pi R^2$$

$$\text{ปริมาตร} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

2.2 ฝาทรงกลม (Spherical cap)

ฝาทรงกลม (Spherical Cap) เป็นทรงเรขาคณิตสามมิติที่เกิดจากการตัดทรงกลมด้วยระนาบ ทำให้เกิดเป็นรูปทรงที่ส่วนฐานเป็นวงกลม และส่วนยอดมีผิวโค้งคล้ายขนมหรือฝาคาบ (Spherical Cap, Wolfram MathWorld)



ภาพที่ 2 ฝาทรงกลม (Spherical Cap)
ที่มา: Spherical Cap, Wolfram MathWorld

กำหนดให้

R แทน รัศมีของทรงกลม

a แทน รัศมีของวงกลมฐานของทรงกลมตัด

h แทน ความสูงของทรงกลมตัด

$$\text{พื้นที่ผิว} = \text{พื้นที่ผิวส่วนโค้ง} + \text{พื้นที่ฐาน}$$

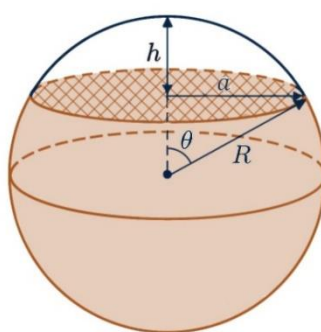
$$= 2\pi Rh + \pi a^2$$

$$\text{ปริมาตร (เมื่อใช้ } R \text{ และ } h) = \frac{\pi h^2}{3} (3R - h)$$

$$\text{ปริมาตร (เมื่อใช้ } a \text{ และ } h) = \frac{\pi h}{6} (3a^2 + h^2)$$

2.3 ทรงกลมตัด

ทรงกลมตัด คือ รูปทรงเรขาคณิตสามมิติที่เกิดจากการตัดส่วนหนึ่งของทรงกลมออกด้วย ฝาทรงกลม ส่งผลให้รูปทรงที่เหลือมีลักษณะเป็นทรงกลมที่มีฐานเป็นรูปวงกลมราบเพียงด้านเดียว ในขณะที่ส่วนยอดคงลักษณะผิวโค้งมนเดิมไว้ โดยปริมาตรและพื้นที่ผิวของทรงกลมตัด สามารถคำนวณได้จากส่วนต่างระหว่างค่าของทรงกลมเต็มรูปกับส่วนของฝาทรงกลมที่ถูกตัดออกไป



ภาพที่ 3 ทรงกลมตัด

กำหนดให้

R แทน รัศมีของทรงกลม

a แทน รัศมีของวงกลมฐานของทรงกลมยอดตัด

h แทน ความสูงของทรงกลมยอดตัด

$$\text{พื้นที่ผิว} = \text{พื้นที่ผิวทรงกลม} - \text{พื้นที่ผิวส่วนโค้ง} + \text{พื้นที่ฐาน}$$

$$\text{พื้นที่ผิว} = 4\pi R^2 - 2\pi R h + \pi a^2$$

$$\text{ปริมาตร} = \text{ปริมาตรของทรงกลม} - \text{ปริมาตรของฝาทรงกลม}$$

$$\text{ปริมาตร (เมื่อใช้ } R \text{ และ } h) = \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{\pi h^2}{3}(3R - h)$$

$$\text{ปริมาตร (เมื่อใช้ } a \text{ และ } h) = \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{\pi h}{6}(3a^2 + h^2)$$

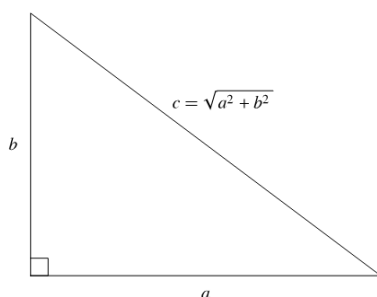
2.4 ทฤษฎีบทพีทาโกรัส (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, 2563)

ทฤษฎีบทพีทาโกรัส คือ ความสัมพันธ์ระหว่างความยาวของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากข้างต้น กล่าวคือ กำลังสองของความยาวด้านตรงข้ามมุมฉากเท่ากับผลบวกกำลังสองของความยาวของด้านประกอบมุมฉาก สมบัตินี้เรียกว่า ทฤษฎีบทพีทาโกรัส

เมื่อ c แทน ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก

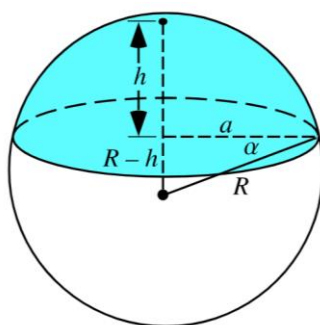
a และ b แทนความยาวของด้านประกอบมุมฉาก

เขียนเป็น สมการพีทาโกรัส ได้ดังนี้ $c^2 = a^2 + b^2$



ภาพที่ 4 ทฤษฎีบทพีทาโกรัส

ที่มา: Pythagorean Theorem, Wolfram MathWorld



ภาพที่ 5 รูปตัดขวาง

ที่มา: Spherical Cap, Wolfram MathWorld

กำหนดให้

R แทน รัศมีของวงกลมใหญ่ที่เป็นส่วนประกอบของรูปตัดขวาง

a แทน รัศมีของวงกลมฐานของทรงกลมตัด

h แทน ระยะทางตั้งฉากจากระนาบที่ตัดถึงจุดบนผิวโค้งของทรงกลม

จากรูปตัดขวางของทรงกลมจะได้ว่า

$$R^2 = a^2 + (R - h)^2$$

บทที่ 3

วิธีการดำเนินงาน

โครงการคณิตศาสตร์ เรื่อง การออกแบบบรรจุภัณฑ์จากทรงกลมตัด คณะผู้จัดทำได้ดำเนินงานดังต่อไปนี้

- 3.1 เครื่องมือที่ใช้
- 3.2 แผนการปฏิบัติงาน
- 3.3 ขั้นตอนการดำเนินงาน
- 3.4 การทดสอบและปรับปรุง

3.1 เครื่องมือที่ใช้

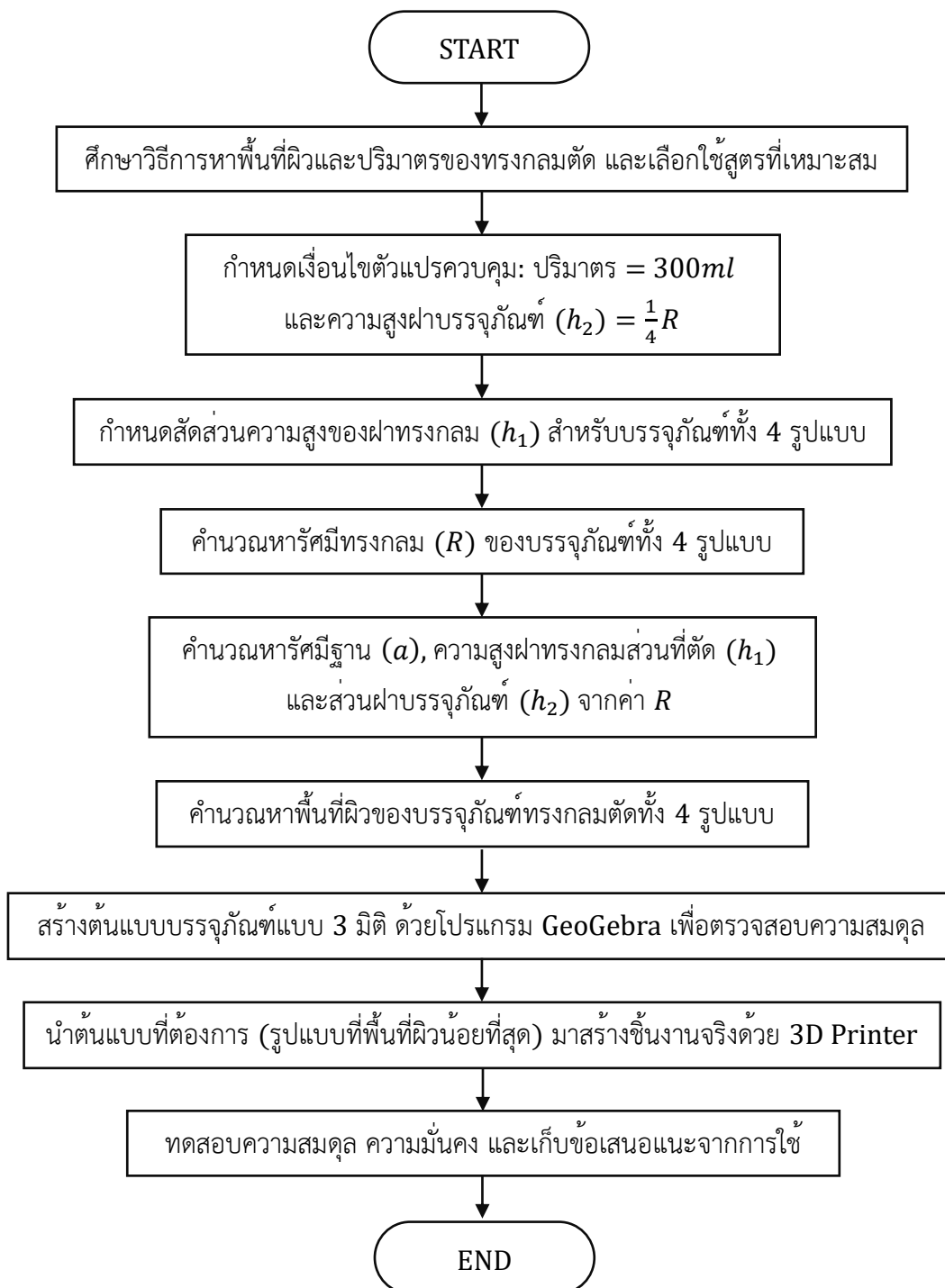
- 3.1.1 โปรแกรม GeoGebra
- 3.1.2 วัสดุหลักที่ใช้ในการสร้างแบบจำลองบรรจุภัณฑ์ ได้แก่ พลาสติกขึ้นรูป
- 3.1.3 อุปกรณ์ที่ใช้ในการสร้างแบบจำลองบรรจุภัณฑ์ ได้แก่ 3D printer

3.2 แผนการปฏิบัติงาน

ตารางที่ 1 ตารางแสดงระยะเวลาในการดำเนินโครงการ

ลำดับ	การดำเนินการศึกษา	ระยะเวลา	ผู้รับผิดชอบ
1	เลือกหัวข้อโครงการ	ตุลาคม 68	คณะผู้จัดทำ
2	เสนอหัวข้อโครงการแก่ครูที่ปรึกษา	ตุลาคม 68	คณะผู้จัดทำ
3	วางแผนการดำเนินโครงการ	ธันวาคม 68	คณะผู้จัดทำ
4	รวบรวมข้อมูลที่ใช้ในการศึกษา	ธันวาคม 68	คณะผู้จัดทำ
5	เริ่มปฏิบัติงานตามแผนการทำงาน	ธันวาคม 68	คณะผู้จัดทำ
6	วิเคราะห์ข้อมูลจากการศึกษาโครงการ	มกราคม 69	คณะผู้จัดทำ
7	อภิปรายผลการดำเนินงาน	กุมภาพันธ์ 69	คณะผู้จัดทำ
8	จัดทำรูปเล่มโครงการ	กุมภาพันธ์ 69	คณะผู้จัดทำ
9	นำเสนอโครงการ	มีนาคม 69	คณะผู้จัดทำ

3.3 ขั้นตอนการดำเนินงาน



ภาพที่ 6 Flowchart วิธีการดำเนินงาน

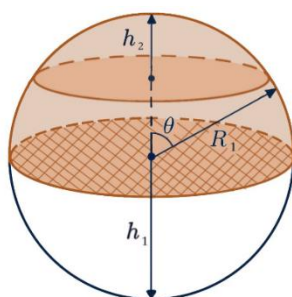
3.3.1 ศึกษาวิธีการหาพื้นที่ผิว และปริมาตร ของทรงกลมตัด โดยกำหนดให้

R	แทน รัศมีของทรงกลม (รัศมีของวงกลมใหญ่)
a	แทน รัศมีของวงกลมฐานของทรงกลมยอดตัด
h	แทน ความสูงของทรงกลมผ่าทรงกลม
A	แทน พื้นที่ผิวของทรงกลมตัด
V_1	แทน ปริมาตรของทรงกลมตัด (เมื่อใช้ R และ h)
V_2	แทน ปริมาตรของทรงกลมตัด (เมื่อใช้ a และ h)

3.3.2 หารัศมีของบรรจุภัณฑ์ทรงกลมตัด 4 รูปแบบ โดยกำหนดให้ความสูงของฝาบรรจุภัณฑ์มีความสูง $\frac{1}{4}$ ของรัศมีและ ควบคุมปริมาตรให้เท่ากับ 300 ml ซึ่งเท่ากับปริมาตรของขวดซีอิ๊วตราแคะขนาดเล็ก โดยกำหนดให้

h_1	แทน ความสูงของฝาทรงกลม (ส่วนที่ถูกตัดออกไป)
h_2	แทน ความสูงของฝาทรงกลม (ส่วนฝาของบรรจุภัณฑ์)
R_1	แทน รัศมีของทรงกลมรูปแบบที่ 1 (รัศมีของวงกลมใหญ่) ที่ควบคุมความสูงของฝาทรงกลม $h_1 = R_1$
R_2	แทน รัศมีของทรงกลมรูปแบบที่ 2 (รัศมีของวงกลมใหญ่) ที่ควบคุมความสูงของฝาทรงกลม $h_1 = \frac{3}{4} R_2$
R_3	แทน รัศมีของทรงกลมรูปแบบที่ 3 (รัศมีของวงกลมใหญ่) ที่ควบคุมความสูงของฝาทรงกลม $h_1 = \frac{2}{3} R_3$
R_4	แทน รัศมีของทรงกลมรูปแบบที่ 4 (รัศมีของวงกลมใหญ่) ที่ควบคุมความสูงของฝาทรงกลม $h_1 = \frac{1}{2} R_4$

3.3.2.1 รัศมีของบรรจุภัณฑ์รูปแบบที่ 1



ภาพที่ 7 บรรจุภัณฑ์รูปแบบที่ 1

วิธีทำ ควบคุมความสูงของฝาทรงกลม $h_1 = R_1$ และ $h_2 = \frac{1}{4}R_1$ เมื่อ $\pi = \frac{22}{7}$

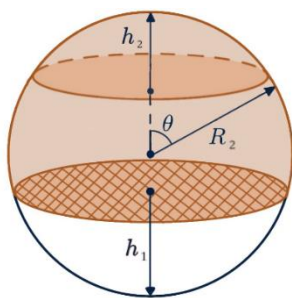
จากสูตรการหาปริมาตร

$$V = \frac{\pi}{3}(4R^3 - 3Rh_1^2 + h_1^3) - \frac{\pi h_2^2}{3}(3R - h_2)$$

แทนค่า $300 = \frac{\pi}{3}[4(R_1)^3 - 3R_1(R_1)^2 + (R_1)^3] - \frac{\pi(\frac{R_1}{4})^2}{3}[3R_1 - (\frac{R_1}{4})]$

จะได้ $R_1 \approx 5.391$ เซนติเมตร

3.3.2.2 รัศมีของบรรจุภัณฑ์รูปแบบที่ 2



ภาพที่ 8 บรรจุภัณฑ์รูปแบบที่ 2

วิธีทำ ควบคุมความสูงของฝาทรงกลม $h_1 = \frac{3}{4}R_2$ และควบคุม $h_2 = \frac{1}{4}R_2$ เมื่อ $\pi = \frac{22}{7}$

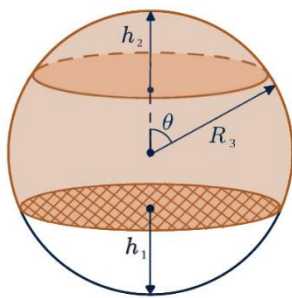
จากสูตรการหาปริมาตร

$$V = \frac{\pi}{3}(4R^3 - 3Rh_1^2 + h_1^3) - \frac{\pi h_2^2}{3}(3R - h_2)$$

แทนค่า $300 = \frac{\pi}{3}[4(R_2)^3 - 3R_2(\frac{3}{4}R_2)^2 + (\frac{3}{4}R_2)^3] - \frac{\pi(\frac{R_2}{4})^2}{3}[3R_2 - (\frac{R_2}{4})]$

จะได้ $R_2 \approx 4.816$ เซนติเมตร

3.3.2.3 รัศมีของบรรจุภัณฑ์รูปแบบที่ 3



ภาพที่ 9 บรรจุภัณฑ์รูปแบบที่ 3

วิธีทำ ควบคุมความสูงของฝาทรงกลม $h_1 = \frac{2}{3}R_3$ และควบคุม $h_2 = \frac{1}{4}R_3$ เมื่อ $\pi = \frac{22}{7}$

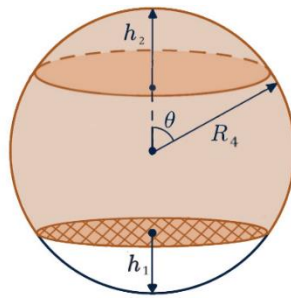
จากสูตรการหาปริมาตร

$$V = \frac{\pi}{3}(4R^3 - 3Rh_1^2 + h_1^3) - \frac{\pi h_2^2}{3}(3R - h_2)$$

แทนค่า $300 = \frac{\pi}{3}\left[4(R_3)^3 - 3R_3\left(\frac{2}{3}R_3\right)^2 + \left(\frac{2}{3}R_3\right)^3\right] - \frac{\pi\left(\frac{R_3}{4}\right)^2\left[3R_3 - \left(\frac{R_3}{4}\right)\right]}$

จะได้ $R_3 \approx 4.681$ เซนติเมตร

3.3.2.4 รัศมีของบรรจุภัณฑ์รูปแบบที่ 4



ภาพที่ 10 บรรจุภัณฑ์รูปแบบที่ 4

วิธีทำ ควบคุมความสูงของฝาทรงกลม $h_1 = \frac{1}{2}R_4$ และ $h_2 = \frac{1}{4}R_4$ เมื่อ $\pi = \frac{22}{7}$

จากสูตรการหาปริมาตร

$$V = \frac{\pi}{3}(4R^3 - 3Rh_1^2 + h_1^3) - \frac{\pi h_2^2}{3}(3R - h_2)$$

แทนค่า $300 = \frac{\pi}{3}\left[4(R_4)^3 - 3R_4\left(\frac{1}{2}R_4\right)^2 + \left(\frac{1}{2}R_4\right)^3\right] - \frac{\pi\left(\frac{R_4}{4}\right)^2\left[3R_4 - \left(\frac{R_4}{4}\right)\right]}$

จะได้ $R_4 \approx 4.471$ เซนติเมตร

3.3.3 คำนวณหาค่า a, h_1 และ h_2 จากค่า R เพื่อใช้ตรวจสอบความถูกต้องของสัดส่วนบรรจุภัณฑ์ทรงกลมตัดทั้ง 4 รูปแบบ โดยกำหนดให้

a_1 แทน รัศมีของวงกลมฐานทรงกลมตัดรูปแบบที่ 1 ที่ควบคุมความสูงของฝาทรงกลม $h_1 = R_1$ และ $h_2 = \frac{1}{4}R_1$

a_2 แทน รัศมีของวงกลมฐานทรงกลมตัดรูปแบบที่ 2 ที่ควบคุมความสูงของฝาทรงกลม $h_1 = \frac{3}{4}R_2$ และ $h_2 = \frac{1}{4}R_2$

a_3 แทน รัศมีของวงกลมฐานทรงกลมตัดรูปแบบที่ 3 ที่ควบคุมความสูงของฝาทรงกลม $h_1 = \frac{2}{3}R_3$ และ $h_2 = \frac{1}{4}R_3$

a_4 แทน รัศมีของวงกลมฐานทรงกลมตัดรูปแบบที่ 4 ที่ควบคุมความสูงของฝาทรงกลม $h_1 = \frac{1}{2}R_4$ และ $h_2 = \frac{1}{4}R_4$

ตารางที่ 2 แสดงองค์ประกอบของบรรจุภัณฑ์ทรงกลมตัดทั้ง 4 รูปแบบ

รูปแบบ	R	a	h_1	h_2
รูปแบบที่ 1	R_1	$\sqrt{2R_1h_1 - h_1^2}$	R_1	$\frac{1}{4}R_1$
รูปแบบที่ 2	R_2	$\sqrt{2R_2h_1 - h_1^2}$	$\frac{3}{4}R_2$	$\frac{1}{4}R_2$
รูปแบบที่ 3	R_3	$\sqrt{2R_3h_1 - h_1^2}$	$\frac{2}{3}R_3$	$\frac{1}{4}R_3$
รูปแบบที่ 4	R_4	$\sqrt{2R_4h_1 - h_1^2}$	$\frac{1}{2}R_4$	$\frac{1}{4}R_4$

3.3.3.1 รัศมีฐาน ความสูงของฝาทรงกลมและฝาบรรจุภัณฑ์รูปแบบที่ 1

วิธีทำ ควบคุมความสูงของฝาทรงกลม $h_1 = R_1$ และ $h_2 = \frac{1}{4}R_1$ โดย $R_1 \approx 5.391$ เซนติเมตร

เมื่อ $\pi = \frac{22}{7}$

จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส

$$\begin{array}{lll}
 R^2 & = & a^2 + (R - h_1)^2 \\
 \text{แทนค่า} & (5.391)^2 & = a^2 + [5.391 - 5.391]^2 \\
 \text{จะได้} & a_1 & \approx 5.391 \text{ เซนติเมตร} \\
 & h_1 & \approx 5.391 \text{ เซนติเมตร} \\
 & h_2 & \approx 1.348 \text{ เซนติเมตร}
 \end{array}$$

3.3.3.2 รัศมีฐาน ความสูงของฝาทรงกลมและฝาบรรจุภัณฑ์รูปแบบที่ 2

วิธีทำ ควบคุมความสูงของฝาทรงกลม $h_1 = \frac{3}{4}R_2$ และ $h_2 = \frac{1}{4}R_2$ โดย $R_2 \approx 4.816$ เซนติเมตร

เมื่อ $\pi = \frac{22}{7}$

จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส

$$\begin{array}{lll}
 R^2 & = & a^2 + (R - h_1)^2 \\
 \text{แทนค่า} & (4.816)^2 & = a^2 + \left[4.816 - \frac{3}{4}(4.816)\right]^2 \\
 \text{จะได้} & a_2 & \approx 4.663 \text{ เซนติเมตร} \\
 & h_1 & \approx 3.612 \text{ เซนติเมตร} \\
 & h_2 & \approx 1.204 \text{ เซนติเมตร}
 \end{array}$$

3.3.3.3 รัศมีฐาน ความสูงของฝาทรงกลมและฝาบรรจุภัณฑ์รูปแบบที่ 3

วิธีทำ ควบคุมความสูงของฝาทรงกลม $h_1 = \frac{2}{3}R_3$ และ $h_2 = \frac{1}{4}R_3$ โดย $R_3 \approx 4.681$ เซนติเมตร

เมื่อ $\pi = \frac{22}{7}$

จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส

	R^2	$= a^2 + (R - h_1)^2$
แทนค่า	$(4.681)^2$	$= a^2 + \left[4.681 - \frac{2}{3}(4.681)\right]^2$
จะได้	a_3	≈ 4.413 เซนติเมตร
	h_1	≈ 3.121 เซนติเมตร
	h_2	≈ 1.17 เซนติเมตร

3.3.3.4 รัศมีฐาน ความสูงของฝาทรงกลมและฝาบรรจุภัณฑ์รูปแบบที่ 4

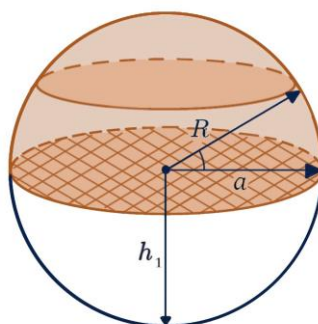
วิธีทำ ควบคุมความสูงของฝาทรงกลม $h_1 = \frac{1}{2}R_4$ และ $h_2 = \frac{1}{4}R_4$ โดย $R_4 \approx 4.471$ เซนติเมตร

เมื่อ $\pi = \frac{22}{7}$

จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส

	R^2	$= a^2 + (R - h_1)^2$
แทนค่า	$(4.471)^2$	$= a^2 + \left[4.471 - \frac{1}{2}(4.471)\right]^2$
จะได้	a_4	≈ 3.872 เซนติเมตร
	h_1	≈ 2.236 เซนติเมตร
	h_2	≈ 1.118 เซนติเมตร

3.3.4 หาพื้นที่ผิวของบรรจุภัณฑ์ทรงกลมตัด 4 รูปแบบ



ภาพที่ 11 บรรจุภัณฑ์

การหาพื้นที่ผิวของบรรจุภัณฑ์ทรงกลมตัด

จาก

$$R^2 = a^2 + (R - h_1)^2$$

$$R^2 = a^2 + R^2 - 2Rh_1 + h_1^2$$

$$a^2 = 2Rh_1 - h_1^2$$

พื้นที่ผิวของบรรจุภัณฑ์

$$= 4\pi R^2 - 2\pi Rh_1 + \pi a^2$$

$$= \pi(4R^2 - 2Rh_1 + a^2)$$

$$= \pi(4R^2 - 2Rh_1 + 2Rh_1 - h_1^2)$$

$$= \pi(4R^2 - h_1^2)$$

กำหนดให้

A_1 แทน พื้นที่ผิวของทรงกลมตัดรูปแบบที่ 1

A_2 แทน พื้นที่ผิวของทรงกลมตัดรูปแบบที่ 2

A_3 แทน พื้นที่ผิวของทรงกลมตัดรูปแบบที่ 3

A_4 แทน พื้นที่ผิวของทรงกลมตัดรูปแบบที่ 4

3.3.4.1 พื้นที่ผิวของบรรจุภัณฑ์รูปแบบที่ 1

วิธีทำ ควบคุมความสูงของฝาทรงกลม $h_1 = R$

จากสูตรการหาพื้นที่ผิว

	A_1	$= \pi(4R^2 - h_1^2)$
แทนค่า	A_1	$= \pi[4(5.391)^2 - (5.391)^2]$
จะได้	A_1	$\approx 87.189\pi$ ตารางเซนติเมตร

3.3.4.2 พื้นที่ผิวของบรรจุภัณฑ์รูปแบบที่ 2

วิธีทำ ควบคุมความสูงของฝาทรงกลม $h_1 = \frac{3}{4}R$

จากสูตรการหาพื้นที่ผิว

	A_2	$= \pi(4R^2 - h_1^2)$
แทนค่า	A_2	$= \pi[4(4.816)^2 - (3.612)^2]$
จะได้	A_2	$\approx 79.729\pi$ ตารางเซนติเมตร

3.3.4.3 พื้นที่ผิวของบรรจุภัณฑ์รูปแบบที่ 3

วิธีทำ ควบคุมความสูงของฝาทรงกลม $h_1 = \frac{2}{3}R$

จากสูตรการหาพื้นที่ผิว

	A_3	$= \pi(4R^2 - h_1^2)$
แทนค่า	A_3	$= \pi[4(4.681)^2 - (3.121)^2]$
จะได้	A_3	$\approx 77.908\pi$ ตารางเซนติเมตร

3.3.4.4 พื้นที่ผิวของบรรจุภัณฑ์รูปแบบที่ 4

วิธีทำ ควบคุมความสูงของฝาทรงกลม $h_1 = \frac{1}{2}R$

จากสูตรการหาพื้นที่ผิว

	A_4	$= \pi(4R^2 - h_1^2)$
แทนค่า	A_4	$= \pi[4(4.471)^2 - (2.236)^2]$
จะได้	A_4	$\approx 74.962\pi$ ตารางเซนติเมตร

3.3.5 ใช้โปรแกรม GeoGebra ในการสร้างต้นแบบบรรจุภัณฑ์ทั้ง 4 รูปแบบ เพื่อตรวจสอบความสมดุล และความสวยงามของแต่ละรูปแบบ

3.3.6 นำต้นแบบของบรรจุภัณฑ์ที่ต้องการมาสร้างโมเดลบรรจุภัณฑ์ด้วย 3D printer

3.4 การทดสอบและปรับปรุง

3.4.1 ทดสอบความสมดุล และความมั่นคงของบรรจุภัณฑ์

3.4.2 เก็บข้อสังเกตและข้อคิดเห็นจากผู้ใช้งาน

บทที่ 4

ผลการดำเนินงาน

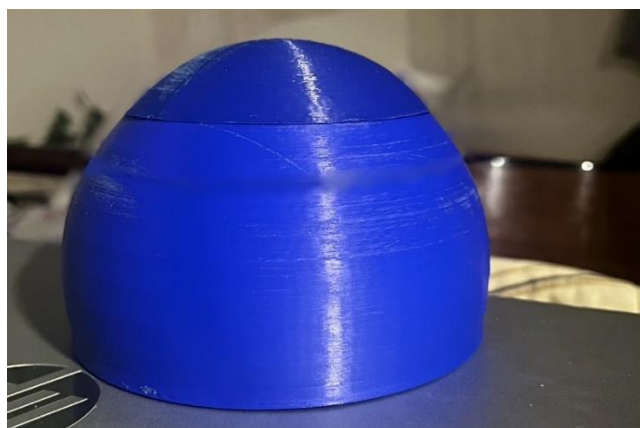
โครงการคณิตศาสตร์ เรื่อง การออกแบบบรรจุภัณฑ์จากทรงกลมตัด คณะผู้จัดทำ
ได้ผลการดำเนินงาน ดังต่อไปนี้

ผลการเปรียบเทียบพื้นที่ผิวของบรรจุภัณฑ์

ตารางที่ 3 แสดงองค์ประกอบ ปริมาตร (V) และพื้นที่ผิวของบรรจุภัณฑ์ทรงกลมตัด (A) ทั้ง
4 รูปแบบ โดยควบคุมความสูงของฝาบรรจุภัณฑ์ (h_2) ให้มีความสูง $\frac{1}{4}$ ของรัศมี (R) และปริมาตร
(V) = 300 ml

รูปแบบ	R	a	h_1	h_2	V	A
รูปแบบที่ 1	5.391	5.391	5.391	1.348	300	87.189π
รูปแบบที่ 2	4.816	4.663	3.612	1.204	300	79.729π
รูปแบบที่ 3	4.681	4.413	3.121	1.17	300	77.908π
รูปแบบที่ 4	4.471	3.872	2.236	1.118	300	74.962π

จากตารางที่ 3 พบว่าแบบบรรจุภัณฑ์ทรงกลมตัดในรูปแบบที่ 4 มีพื้นที่ผิวน้อยที่สุดและรูปแบบที่ 1
มีพื้นที่ผิวมากที่สุด เมื่อกำหนดให้มีปริมาตรเท่ากัน ดังนั้น คณะผู้จัดทำจึงเลือกแบบบรรจุภัณฑ์
ทรงกลมตัดรูปแบบที่ 4 เป็นแบบในการสร้างโมเดลด้วย 3D printer



ภาพที่ 12 โมเดลบรรจุภัณฑ์รูปแบบที่ 4

บทที่ 5

สรุป อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ

จากการทำโครงการคณิตศาสตร์ เรื่อง การออกแบบบรรจุภัณฑ์จากทรงกลมตัดสรุปผลได้ ดังนี้

5.1 สรุปผลการดำเนินงาน

จากการเปรียบเทียบสัดส่วน ปริมาตร และพื้นที่ผิวของบรรจุภัณฑ์ทรงกลมตัดทั้ง 4 รูปแบบ โดยควบคุมความสูงของฝาบรรจุภัณฑ์ให้มีความสูง $\frac{1}{4}$ ของรัศมีทรงกลม เมื่อกำหนดให้ปริมาตร เท่ากับ 300 มิลลิลิตร ได้เป็นผลดังนี้

5.1.1 รูปแบบที่ 1 มีพื้นที่ผิว 87.189π ตารางเซนติเมตร

5.1.2 รูปแบบที่ 2 มีพื้นที่ผิว 79.729π ตารางเซนติเมตร

5.1.3 รูปแบบที่ 3 มีพื้นที่ผิว 77.908π ตารางเซนติเมตร

5.1.4 รูปแบบที่ 4 มีพื้นที่ผิว 74.962π ตารางเซนติเมตร

พบว่าบรรจุภัณฑ์ทรงกลมตัดในรูปแบบที่ 4 มีพื้นที่ผิวน้อยที่สุดและรูปแบบที่ 1 มีพื้นที่ผิวมากที่สุด เมื่อกำหนดให้มีปริมาตรเท่ากัน ดังนั้น คณะผู้จัดทำจึงเลือกบรรจุภัณฑ์ทรงกลมตัดรูปแบบที่ 4 เป็นแบบในการสร้างโมเดลด้วย 3D printer

5.2 อภิปรายผล

จากผลการดำเนินงาน พบว่าเมื่อกำหนดปริมาตรของบรรจุภัณฑ์ให้คงที่ พื้นที่ผิวรวมของบรรจุภัณฑ์ทรงกลมตัดจะแปรผันตามสัดส่วนความสูงของฝาทรงกลมส่วนที่ถูกตัดออกไปตามหลักเรขาคณิต ทรงกลม เป็นรูปทรงที่มีอัตราส่วนพื้นที่ผิวต่อปริมาตรต่ำที่สุด ดังนั้นเมื่อบรรจุภัณฑ์มีรูปทรงที่รักษาสภาพใกล้เคียงกับทรงกลมมากเท่าใด พื้นที่ผิวก็จะยิ่งน้อยลงเท่านั้น

5.2.1 รูปแบบที่ 1 (ครึ่งทรงกลม): มีการตัดฝาทรงกลมออกไปมากที่สุด ทำให้มีรูปร่างและสัดส่วนต่างจากทรงกลมมากที่สุด การที่จะรักษาความจุให้ได้ 300 มิลลิลิตร รัศมีของทรงกลมจึงต้องถูกขดเซยให้ขยายตัวกว้างขึ้น และสูญเสียพื้นที่ผิวรวมมากที่สุดถึง 87.189π ตารางเซนติเมตร

5.2.2 รูปแบบที่ 4 (ทรงกลมตัดที่มีความสูงของฝาทรงกลมเป็น $\frac{1}{2}$ ของรัศมีทรงกลม): มีการตัดฝาทรงกลมออกไปน้อยที่สุด ทำให้รูปร่างและสัดส่วนของรูปทรงยังคงความโค้งมนใกล้เคียงกับทรงกลมมากกว่ารูปแบบอื่น การที่จะรักษาความจุให้ได้ 300 มิลลิลิตร รัศมีของทรงกลม จึงต้องหดตัวลง และพื้นที่ผิวรวมลดลงเหลือน้อยที่สุดเพียง 74.962π ตารางเซนติเมตร

5.3 ข้อเสนอแนะ

เพื่อพัฒนาโครงการนี้ให้มีความสมบูรณ์และสามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้จริงมากยิ่งขึ้น คณะผู้จัดทำมีข้อเสนอแนะดังนี้

5.3.1 ควรมีการศึกษาเพิ่มเติมเกี่ยวกับจุดศูนย์ถ่วงบรรจุภัณฑ์ทรงกลมตัด เพื่อพัฒนารูปแบบให้มีพื้นที่ผิวน้อยที่สุด

5.3.2 ควรพัฒนาฝาปิดของบรรจุภัณฑ์ เพื่อลดพื้นที่ผิวของบรรจุภัณฑ์

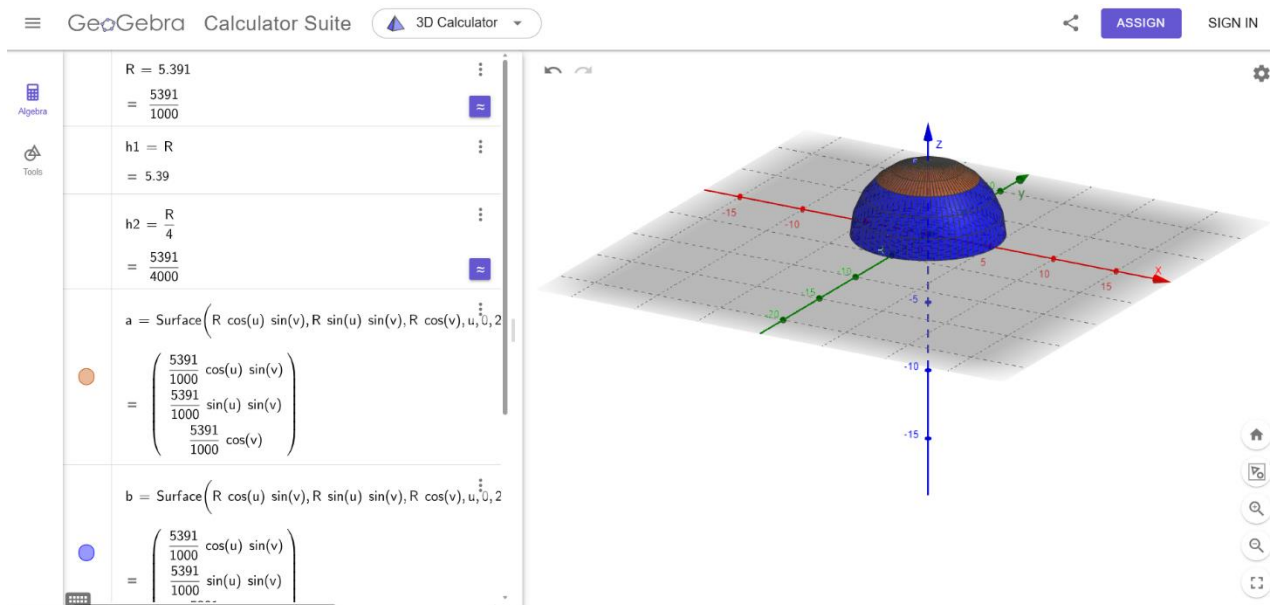
บรรณานุกรม

- บริษัทผู้ผลิตซีอีว트라แกะ. (ม.ป.ป.). ข้อมูลผลิตภัณฑ์และปริมาณบรรจุภัณฑ์ซีอีวขาว. สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2563). หนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 เล่ม 2 (ตามมาตรฐานการเรียนรู้และตัวชี้วัด กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560)). ศูนย์หนังสือแห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2563). หนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เล่ม 2 (ตามมาตรฐานการเรียนรู้และตัวชี้วัด กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560)). ศูนย์หนังสือแห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- GeoGebra. (2026). *GeoGebra Classic 6 (Version 6.0)* [Computer software]. <https://www.geogebra.org>
- Weisstein, E. W. (2569). *Pythagorean Theorem*. Wolfram MathWorld. <https://mathworld.wolfram.com/PythagoreanTheorem.html>
- Weisstein, E. W. (2026a). *Sphere*. MathWorld--A Wolfram Web Resource. <https://mathworld.wolfram.com/Sphere.html>
- Weisstein, E. W. (2026b). *Spherical cap*. MathWorld--A Wolfram Web Resource. <https://mathworld.wolfram.com/SphericalCap.html>

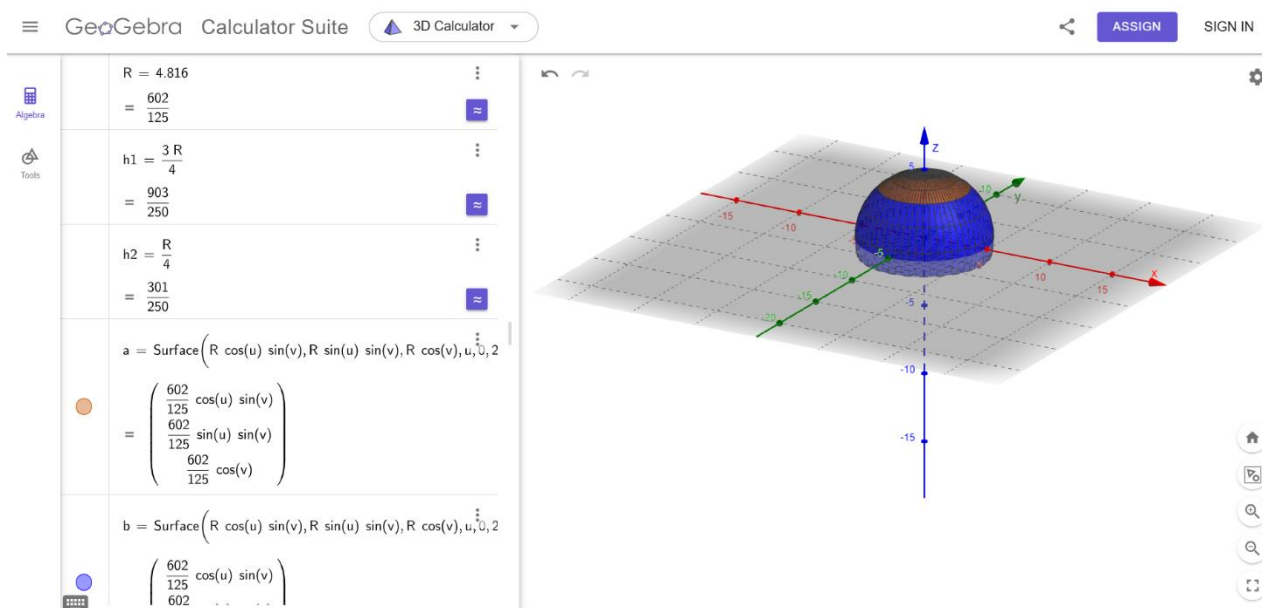
ภาคผนวก

ภาพจากโปรแกรม GeoGebra

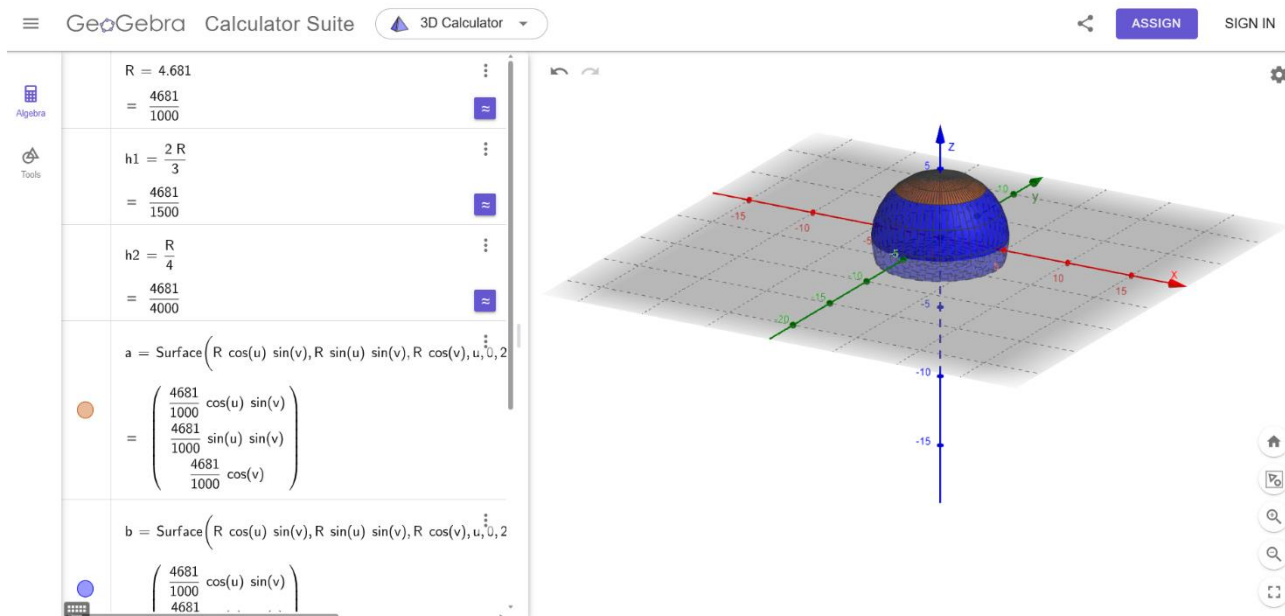
- ภาพแบบจำลองรูปแบบที่ 1: ครึ่งทรงกลม



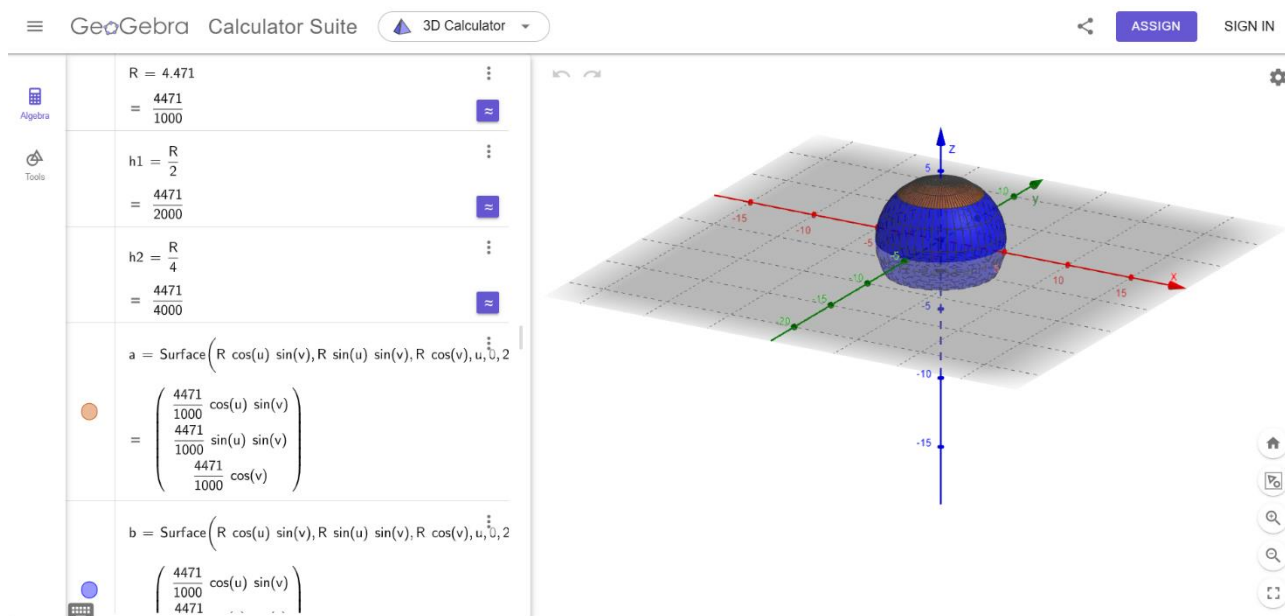
- ภาพแบบจำลองรูปแบบที่ 2: ทรงกลมตัดที่มีความสูงของฝาทรงกลมเป็น $\frac{3}{4}$ ของรัศมีทรงกลม



- ภาพแบบจำลองรูปแบบที่ 3: ทรงกลมตัดที่มีความสูงของฝาทรงกลมเป็น $\frac{2}{3}$ ของรัศมีทรงกลม



- ภาพแบบจำลองรูปแบบที่ 4: ทรงกลมตัดที่มีความสูงของฝาทรงกลมเป็น $\frac{1}{2}$ ของรัศมีทรงกลม



ภาพการดำเนินโครงการ

- ภาพเครื่องมือที่ใช้สร้างโมเดล



- ภาพขณะ 3D printer กำลังทำงาน



