



ส่วนขยายของฟังก์ชันตรีโกณมิติจากรูปสามเหลี่ยมด้านไม่เท่า โดยไม่ใช้กฎของไซน์

### กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

|                      |            |                       |
|----------------------|------------|-----------------------|
| เด็กชายจิรกฤต        | โสทธิพิทย์ | ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 |
| เด็กหญิงอนงค์บุษย์กร | ขวัญแก้ว   | ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 |
| เด็กหญิงกลินพัฒน์    | บุญเมือง   | ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 |

### ครูที่ปรึกษา

นางสาวเจนจิรา ทิพย์ญาณ

นายจักรพงศ์ นาคประเสริฐ

โรงเรียนสุราษฎร์ธานี ๒

สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษาสุราษฎร์ธานี ชุมพร

รายงานนี้เป็นส่วนหนึ่งของการประกวดโครงงานคณิตศาสตร์ประเภททฤษฎี  
ระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น

สัปดาห์วิทยาศาสตร์แห่งชาติส่วนภูมิภาค ประจำปี พ.ศ. 2569  
คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏสุราษฎร์ธานี  
ระหว่างวันที่ 18 – 20 สิงหาคม 2569

ส่วนขยายของฟังก์ชันตรีโกณมิติจากรูปสามเหลี่ยมด้านไม่เท่า โดยไม่ใช้กฎของไซน์

### กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

|                      |            |                       |
|----------------------|------------|-----------------------|
| เด็กชายจิรกฤต        | โสทธิพิทย์ | ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 |
| เด็กหญิงอนงค์บุษย์กร | ขวัญแก้ว   | ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 |
| เด็กหญิงกลินพัฒน์    | บุญเมือง   | ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 |

### ครูที่ปรึกษา

นางสาวเจนจิรา ทิพย์ญาณ

นายจักรพงษ์ นาคประเสริฐ

### โรงเรียนสุราษฎร์ธานี ๒

สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษาสุราษฎร์ธานี ชุมพร

รายงานนี้เป็นส่วนหนึ่งของการประกวดโครงงานคณิตศาสตร์ประเภททฤษฎี  
ระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น

สัปดาห์วิทยาศาสตร์แห่งชาติส่วนภูมิภาค ประจำปี พ.ศ. 2569

คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏสุราษฎร์ธานี

ระหว่างวันที่ 18 – 20 สิงหาคม 2569

|                    |                                                                             |            |
|--------------------|-----------------------------------------------------------------------------|------------|
| หัวข้อโครงการ      | ส่วนขยายของฟังก์ชันตรีโกณมิติจากรูปสามเหลี่ยมด้านไม่เท่า โดยไม่ใช้กฎของไซน์ |            |
| ประเภทของโครงการ   | ประเภททฤษฎี                                                                 |            |
| คณะผู้จัดทำโครงการ | 1.เด็กชายจิรฤต                                                              | โสทธิพิทย์ |
|                    | 2.เด็กหญิงอนงค์บุษย์กร                                                      | ขวัญแก้ว   |
|                    | 3.เด็กหญิงกสินพัฒน์                                                         | บุญเมือง   |
| คุณครูที่ปรึกษา    | 1.นางสาวเจนจิรา ทิพย์ญาณ                                                    |            |
|                    | 2.นายจักรพงษ์ นาคประเสริฐ                                                   |            |
| สถานที่ศึกษา       | โรงเรียนสุราษฎร์ธานี ๒                                                      |            |
| ปีการศึกษา         | 2569                                                                        |            |

### บทคัดย่อ

โครงการคณิตศาสตร์ประเภททฤษฎี เรื่อง “ส่วนขยายของฟังก์ชันตรีโกณมิติจากรูปสามเหลี่ยมด้านไม่เท่า โดยไม่ใช้กฎของไซน์” มีวัตถุประสงค์เพื่อ 1. หาสูตรของเอกลักษณ์ตรีโกณมิติมุมสองเท่าสำหรับฟังก์ชันส่วนขยายของไซน์ และโคไซน์ 2. หาสูตรของเอกลักษณ์ตรีโกณมิติมุมครึ่งเท่าสำหรับฟังก์ชันส่วนขยายของไซน์ และโคไซน์ และ 3. หาสูตรของเอกลักษณ์ตรีโกณมิติผลบวก และผลต่างสำหรับฟังก์ชันส่วนขยายของแทนเจนต์ และโคแทนเจนต์ สำหรับรูปสามเหลี่ยมด้านไม่เท่า วิธีการดำเนินงานเริ่มต้นจากการศึกษาแนวคิดเดิมสำหรับฟังก์ชันส่วนขยายของไซน์ และโคไซน์ และผลบวก ผลต่างของฟังก์ชันส่วนขยายของไซน์ และโคไซน์สำหรับสามเหลี่ยมด้านไม่เท่า และนำมาหาส่วนขยายของเอกลักษณ์ตรีโกณมิติเพิ่มเติมจากเดิม โดยคณะผู้จัดทำได้ใช้แนวคิดเดิมมาหาเอกลักษณ์ตรีโกณมิติมุมสองเท่าของฟังก์ชันส่วนขยายของไซน์ และโคไซน์ รวมทั้งหาเอกลักษณ์ตรีโกณมิติของผลบวก ผลต่างของฟังก์ชันส่วนขยายของแทนเจนต์ และโคแทนเจนต์ ผลการศึกษาทำให้ได้สูตรดังนี้

สูตรฟังก์ชันส่วนขยายของไซน์ และโคไซน์มุมสองเท่า คือ

$$\begin{aligned}\sin^*(2\alpha, \gamma) &= 2\sin^*(\alpha, \gamma)\cos^*(\alpha, \gamma) - 2\cos(\gamma)\sin^{*2}(\alpha, \gamma) \\ \cos^*(2\alpha, \gamma) &= \cos^{*2}(\alpha, \gamma) - \sin^{*2}(\alpha, \gamma)\end{aligned}$$

สูตรฟังก์ชันส่วนขยายของไซน์ และโคไซน์มุมครึ่งเท่า คือ

$$\begin{aligned}\sin^*\left(\frac{\alpha}{2}, \gamma\right) &= \sqrt{\frac{1 - \cos^*(\alpha, \gamma) + \sin^*(\alpha, \gamma)\cos\gamma}{2\sin^2\gamma}} \\ \cos^*\left(\frac{\alpha}{2}, \gamma\right) &= \sqrt{\frac{1 + \cos\gamma\sin^*(\alpha, \gamma) - \cos 2\gamma\cos^*(\alpha, \gamma)}{2\sin^2\gamma}}\end{aligned}$$

สูตรผลบวก ผลต่างของฟังก์ชันส่วนขยายของแทนเจนต์ และโคแทนเจนต์ คือ

$$\begin{aligned}\tan^*(A+B, \gamma) &= \frac{\tan^*(A, \gamma) + \frac{\cos^*(A, \pi - \gamma)}{\cos^*(A, \gamma)} \tan^*(B, \gamma)}{1 - \tan^*(A, \gamma) \tan^*(B, \gamma)} \\ \tan^*(A-B, \gamma) &= \frac{\tan^*(A, \gamma) - \tan^*(B, \gamma)}{1 + \frac{\sin^*(A - \pi + 2\gamma, \pi - \gamma)}{\cos^*(A, \gamma)} \tan^*(B, \gamma)} \\ \cot^*(A+B, \gamma) &= \frac{\cot^*(A, \gamma) \cot^*(B, \gamma) - 1}{\cot^*(B, \gamma) + \frac{\cos^*(A, \pi - \gamma)}{\cos^*(A, \gamma)} \cot^*(A, \gamma)} \\ \cot^*(A-B, \gamma) &= \frac{\cot^*(A, \gamma) \cot^*(B, \gamma) + \frac{\sin^*(A - \pi + 2\gamma, \pi - \gamma)}{\cos^*(A, \gamma)} \cot^*(A, \gamma)}{\cot^*(B, \gamma) - \cot^*(A, \gamma)}\end{aligned}$$

นอกจากนี้คณะผู้จัดทำได้ลดรูปสูตรขยายโดยกำหนดให้มุมปรับเปลี่ยน  $\gamma = 90^\circ$  สูตรขยายทั้งหมดสามารถลดรูปกลับไปเป็นเอกลักษณ์ตรีโกณมิติแบบดั้งเดิมได้อีกด้วย

**คำสำคัญ :** ฟังก์ชันตรีโกณมิติ สามเหลี่ยมด้านไม่เท่า เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ

## กิตติกรรมประกาศ

โครงการคณิตศาสตร์ เรื่อง “ส่วนขยายของฟังก์ชันตรีโกณมิติจากรูปสามเหลี่ยมด้านไม่เท่า โดยไม่ใช้กฎของไซน์” สำเร็จลุล่วงลงได้ด้วยความกรุณาอย่างยิ่งจากคุณครูเจนจิรา ทัพย์ญาณ และคุณครูจักรพงษ์ นาคประเสริฐ คุณครูที่ปรึกษาที่ได้ให้คำแนะนำ ให้คำปรึกษา ตรวจสอบแก้ไขข้อบกพร่องต่าง ๆ ด้วยความเอาใจใส่เป็นอย่างดี ตลอดจนคุณครูกลุ่มสาระคณิตศาสตร์โรงเรียนสุราษฎร์ธานี ๒ทุกท่าน ที่ได้ให้ความอนุเคราะห์และความร่วมมือในการจัดทำโครงการ คณะผู้จัดทำขอขอบพระคุณเป็นอย่างสูงไว้ ณ ที่นี้

นอกจากนี้ คณะผู้จัดทำขอขอบพระคุณ บิดามารดาและผู้ปกครองทุกท่าน ที่ได้มอบทั้งขวัญและกำลังใจในการทำโครงการจนประสบความสำเร็จได้ตามแผนที่วางไว้

ท้ายที่สุดนี้ ความสำเร็จของโครงการคณิตศาสตร์ฉบับนี้เป็นผลมาจากความร่วมมือของทุกภาคส่วนที่กล่าวถึง คณะผู้จัดทำขอขอบพระคุณทุกท่านมา ณ โอกาสนี้ หากปรากฏข้อผิดพลาดหรือข้อบกพร่องประการใด คณะผู้จัดทำขอน้อมรับและจะนำข้อคิดเห็นเหล่านั้นไปใช้ในการปรับปรุงและต่อยอดต่อไปในอนาคต

คณะผู้จัดทำ

## สารบัญ

| เรื่อง                                                                               | หน้า      |
|--------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| บทคัดย่อ                                                                             | ก         |
| กิตติกรรมประกาศ                                                                      | ค         |
| สารบัญ                                                                               | ง         |
| สารบัญภาพ                                                                            | ฉ         |
| สารบัญตาราง                                                                          | ช         |
| <b>บทที่ 1      บทนำ</b>                                                             | <b>1</b>  |
| ที่มาและความสำคัญ                                                                    | 1         |
| ประเภทโครงงาน                                                                        | 2         |
| วัตถุประสงค์                                                                         | 2         |
| สาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง                                               | 2         |
| นิยามศัพท์เฉพาะ                                                                      | 2         |
| ขอบเขตการศึกษา / ข้อจำกัด                                                            | 3         |
| ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ                                                            | 3         |
| <b>บทที่ 2      การศึกษาเอกสารที่เกี่ยวข้อง</b>                                      | <b>4</b>  |
| บทความ เรื่อง Extended Sine and Cosine Functions for Scalene Triangles               | 5         |
| บทความ เรื่อง Extended Angle Sum and Difference Identity Rules for Scalene Triangles | 6         |
| ฟังก์ชันตรีโกณมิติ                                                                   | 8         |
| <b>บทที่ 3      วิธีดำเนินงาน</b>                                                    | <b>10</b> |
| ปฏิทินการปฏิบัติงาน                                                                  | 10        |
| ขั้นตอนการดำเนินงาน                                                                  | 12        |
| ตัวอย่างสำหรับการประยุกต์ใช้                                                         | 19        |
| <b>บทที่ 4      ผลการดำเนินงาน</b>                                                   | <b>23</b> |
| <b>บทที่ 5      สรุปผลและอภิปรายผล</b>                                               | <b>25</b> |
| สรุปผลการดำเนินงาน                                                                   | 25        |
| อภิปรายผลการดำเนินงาน                                                                | 26        |

## สารบัญ (ต่อ)

| เรื่อง                           | หน้า |
|----------------------------------|------|
| ประโยชน์ที่ได้รับจากการดำเนินงาน | 27   |
| ข้อเสนอแนะ                       | 27   |
| ภาคผนวก                          |      |

## สารบัญภาพ

| ภาพที่ |                                                                               | หน้า |
|--------|-------------------------------------------------------------------------------|------|
| 2.1    | แสดงรูปสามเหลี่ยมด้านไม่เท่า $ABC$ ที่บรรจุอยู่ภายในรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก $ADC$ | 5    |
| 2.2    | แสดงรูปการหาสูตรการบวกมุม                                                     | 7    |
| 2.3    | แสดงรูปการหาสูตรการลบมุม                                                      | 7    |
| 2.4    | วงกลมหนึ่งหน่วย                                                               | 8    |
| 2.5    | รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก                                                           | 9    |

## สารบัญตาราง

| ตารางที่ |                                                                    | หน้า |
|----------|--------------------------------------------------------------------|------|
| 2.1      | แสดงค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงบางจำนวน                   | 9    |
| 2.2      | แสดงการเปรียบเทียบสูตรแบบขยายกับสูตรดั้งเดิมของเอกลักษณ์ตรีโกณมิติ | 19   |

# บทที่ 1

## บทนำ

### ที่มาและความสำคัญ

วิชาตรีโกณมิติ (Trigonometry) มีรากศัพท์มาจากคำว่า “Trigonon” (รูปสามเหลี่ยม) และ “Metron” (การวัด) ในหลักสูตรคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษา ฟังก์ชันตรีโกณมิติพื้นฐาน เช่น ฟังก์ชันไซน์ ฟังก์ชันโคไซน์ และฟังก์ชันแทนเจนต์ ถูกนิยามขึ้นจากอัตราส่วนความยาวด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยมีมุมปรับเปลี่ยนมุมหนึ่งถูกตรึงไว้ที่  $\gamma = 90^\circ$  อย่างไรก็ตามในทางปฏิบัติและการแก้ปัญหาเชิงเรขาคณิตส่วนใหญ่มักจะพบรูปสามเหลี่ยมด้านไม่เท่า (Scalene Triangle) ซึ่งเมื่อต้องการหาความยาวด้านหรือขนาดของมุมนักเรียนจำเป็นต้องพึ่งพากฎของไซน์ (Law of Sines) หรือกฎของโคไซน์ (Law of Cosines) และต้องดำเนินการหลายขั้นตอน ทำให้ขาดความเชื่อมโยงในเชิงอัตราส่วนที่ง่ายและเป็นระบบเหมือนกรณีของสามเหลี่ยมมุมฉาก

ต่อมาในปี ค.ศ.2022 Luis Teia ได้นำเสนอแนวคิด “ฟังก์ชันตรีโกณมิติส่วนขยายสำหรับสามเหลี่ยมด้านไม่เท่า” (Extended Trigonometric Functions) ได้แก่ ฟังก์ชันส่วนขยายของไซน์  $\sin^*(\alpha, \gamma)$  และฟังก์ชันส่วนขยายของโคไซน์  $\cos^*(\alpha, \gamma)$  ซึ่งเป็นฟังก์ชันที่ขึ้นกับตัวแปร 2 ตัวแปร คือ มุมอ้างอิง  $\alpha$  และมุมปรับเปลี่ยน  $\gamma$  การขยายแนวคิดนี้ช่วยให้สามารถหาความยาวด้านของสามเหลี่ยมด้านไม่เท่าได้ด้วยรูปแบบอัตราส่วนที่เรียบง่ายและสอดคล้องกับคุณสมบัติของสามเหลี่ยมมุมฉากดั้งเดิม ยิ่งไปกว่านั้น Teia ยังได้พิสูจน์ “กฎเอกลักษณ์ผลบวกและผลต่างของมุม” สำหรับฟังก์ชัน  $\sin^*$  และ  $\cos^*$  ไว้เป็นรากฐานที่สำคัญ

อย่างไรก็ตามจากการศึกษาบทความวิจัยดังกล่าวคณะผู้จัดทำพบว่าบทความวิจัยยังไม่ได้มีการขยายสูตรไปสู่ “เอกลักษณ์มุมสองเท่า (Double – Angle Identities)” สำหรับฟังก์ชันส่วนขยายของไซน์และโคไซน์ และยังขาดการพัฒนาฟังก์ชันส่วนขยายของ “แทนเจนต์ ( $\tan^* \alpha$ )” ในรูปผลบวก และผลต่าง รวมถึงฟังก์ชันส่วนขยายของ “โคแทนเจนต์ ( $\cot^* \alpha$ )” อีกด้วย คณะผู้จัดทำจึงนำแนวคิดฟังก์ชันตรีโกณมิติส่วนขยายนี้หาสูตรเพิ่มเติมนอกเหนือจากบทความวิจัยข้างต้น และทำการพิสูจน์ตามหลักการพีชคณิตในระดับมัธยมศึกษา และนำเสนอตัวอย่างที่สามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้

## ประเภทโครงการ

โครงการประเภททฤษฎี

## วัตถุประสงค์

1. เพื่อหาสูตรของเอกลักษณ์ตรีโกณมิติมุมสองเท่าสำหรับฟังก์ชันส่วนขยายของไซน์และโคไซน์
2. เพื่อหาสูตรของเอกลักษณ์ตรีโกณมิติมุมครึ่งเท่าสำหรับฟังก์ชันส่วนขยายของไซน์และโคไซน์
3. เพื่อหาสูตรของเอกลักษณ์ตรีโกณมิติผลบวก และผลต่างสำหรับฟังก์ชันส่วนขยายของแทนเจนต์ และโคแทนเจนต์

## สาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง

ฟังก์ชันตรีโกณมิติ และพีชคณิต

## นิยามศัพท์เฉพาะ

1. สามเหลี่ยมด้านไม่เท่า (Scalene Triangle) หมายถึง สามเหลี่ยมที่มีความยาวด้านทั้งสามยาวไม่เท่ากัน และมุมภายในทั้งสามมุมมีขนาดไม่เท่ากัน
2. ฟังก์ชันส่วนขยายของไซน์ ( $\sin^*(\alpha, \gamma)$ ) หมายถึง อัตราส่วนของ  $\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\gamma)}$
3. ฟังก์ชันส่วนขยายของโคไซน์ ( $\cos^*(\alpha, \gamma)$ ) หมายถึง อัตราส่วนของ  $\frac{\sin(\alpha + \gamma)}{\sin(\gamma)}$
4. ฟังก์ชันส่วนขยายของแทนเจนต์ ( $\tan^*(\alpha, \gamma)$ ) หมายถึง อัตราส่วนที่เกิดจากการหารฟังก์ชันส่วนขยายของไซน์ด้วยฟังก์ชันส่วนขยายของโคไซน์นิยามโดย  $\tan^*(\alpha, \gamma) = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\alpha + \gamma)}$
5. ฟังก์ชันส่วนขยายของโคแทนเจนต์ ( $\cot^*(\alpha, \gamma)$ ) หมายถึง ส่วนกลับของฟังก์ชันส่วนขยายของแทนเจนต์นิยามโดย  $\cot^*(\alpha, \gamma) = \frac{\sin(\alpha + \gamma)}{\sin(\alpha)}$
6. มุมอ้างอิง ( $\alpha$ ) หมายถึง มุมภายในของสามเหลี่ยมด้านไม่เท่าที่อยู่ตรงข้ามกับด้านที่เราต้องการพิจารณา
7. มุมปรับเปลี่ยน ( $\gamma$ ) หมายถึง มุมภายในของสามเหลี่ยมด้านไม่เท่าที่อยู่ตรงข้ามกับด้านที่เราอ้างอิง ซึ่งในฟังก์ชันตรีโกณมิติดั้งเดิมมุมนี้จะถูกตรึงไว้ที่  $90^\circ$

### ขอบเขตการศึกษา / ข้อจำกัด

1. ศึกษาเฉพาะฟังก์ชันตรีโกณมิติ 4 ฟังก์ชัน ได้แก่  $\sin^*$ ,  $\cos^*$ ,  $\tan^*$  และ  $\cot^*$  บน  
ระนาบ 2 มิติ
2. ศึกษาจำกัดเฉพาะมุม  $0^\circ < \gamma < 180^\circ$  และ  $\gamma \neq 90^\circ$

### ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. ได้สูตรเอกลักษณ์ตรีโกณมิติส่วนขยายสำหรับสามเหลี่ยมด้านไม่เท่า ที่สามารถนำไป  
ประยุกต์ใช้ในระดับสูงต่อไป
2. มีการพัฒนาทักษะการคิดวิเคราะห์และการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

## บทที่ 2

### การศึกษาเอกสารที่เกี่ยวข้อง

การศึกษาเอกสารที่เกี่ยวข้องเพื่อทำโครงการคณิตศาสตร์ในครั้งนี้ ได้สืบค้นและรวบรวมแนวคิด หลักการ และงานทางวิชาการที่เกี่ยวข้อง เพื่อใช้เป็นพื้นฐานในการดำเนินโครงการเรื่อง ส่วนขยายของฟังก์ชันตรีโกณมิติจากรูปสามเหลี่ยมด้านไม่เท่า โดยไม่ใช้กฎของไซน์ คณะผู้จัดทำได้ศึกษาเอกสารที่เกี่ยวข้องดังประเด็นต่อไปนี้

1. บทความ เรื่อง Extended Sine and Cosine Functions for Scalene Triangles
  - 1.1 จุดมุ่งหมายของบทความ
  - 1.2 แนวคิดหลักของบทความ
  - 1.3 วิธีการที่ใช้ในบทความ
  - 1.4 ความสำคัญและประโยชน์ของบทความ
2. บทความ เรื่อง Extended Angle Sum and Difference Identity Rules for Scalene Triangles
  - 2.1 จุดมุ่งหมายของบทความ
  - 2.2 แนวคิดหลักของบทความ
  - 2.3 วิธีการที่ใช้ในบทความ
  - 2.4 ความสำคัญและประโยชน์ของบทความ
3. ฟังก์ชันตรีโกณมิติ
  - 3.1 ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์
  - 3.2 ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่นๆ
  - 3.3 สมการเอกลักษณ์แบบพีทาโกรัส
  - 3.4 ฟังก์ชันตรีโกณของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม

## 1. บทความ เรื่อง Extended Sine and Cosine Functions for Scalene Triangles

### 1.1 จุดมุ่งหมายของบทความ

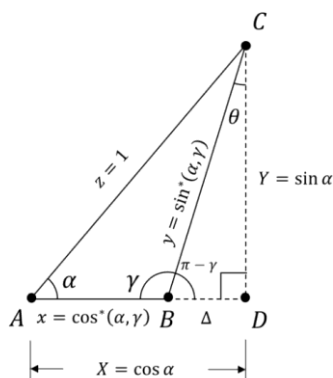
บทความ เรื่อง Extended Sine and Cosine Functions for Scalene Triangles มีจุดมุ่งหมายเพื่อขยายฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ที่สามารถใช้กับสามเหลี่ยมด้านไม่เท่า (Scalene Triangles) ได้โดยไม่จำเป็นต้องจำกัดอยู่เฉพาะสามเหลี่ยมมุมฉาก นอกจากนี้ ได้เสนอฟังก์ชันรูปแบบใหม่คือ  $\sin^*(\alpha, \gamma)$  และ  $\cos^*(\alpha, \gamma)$  ซึ่งขึ้นอยู่กับ ตัวแปรมุมสองมุม แทนที่จะเป็นมุมเดียวแบบดั้งเดิม

### 1.2 แนวคิดหลักของบทความ

แนวคิดหลักของบทความ คือ การเสนอฟังก์ชันไซน์และโคไซน์รูปแบบใหม่ที่ถูกขยายให้สามารถใช้กับสามเหลี่ยมด้านไม่เท่าใด ๆ โดยมีสูตรดังนี้  $\sin^*(\alpha, \gamma) = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\gamma)}$  และ  $\cos^*(\alpha, \gamma) = \frac{\sin(\alpha + \gamma)}{\sin(\gamma)}$  โดยที่  $\alpha$  คือมุมอ้างอิง และ  $\gamma$  คือมุมควบคุมความเอียงของด้านอ้างอิงหลัก ฟังก์ชันใหม่นี้สอดคล้องกับ กฎของโคไซน์ (Law of Cosines) ซึ่งเป็นกฎทั่วไปที่ครอบคลุมทั้งสามเหลี่ยมมุมฉากและสามเหลี่ยมด้านไม่เท่า โดยเมื่อ  $\gamma = 90^\circ$  ฟังก์ชันขยายจะลดรูปกลับไปเป็นฟังก์ชันไซน์และโคไซน์แบบดั้งเดิมทันที

### 1.3 วิธีการที่ใช้ในบทความ

Teia ใช้กระบวนการทางเรขาคณิตและพีชคณิตโดยการกำหนดรูปสามเหลี่ยมด้านไม่เท่า  $ABC$  ที่บรรจุอยู่ภายในรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก  $ADC$  โดยใช้มุมร่วมกันคือ  $\alpha$  และกำหนดด้านตรงข้ามมุมฉาก  $AC = z = 1$  ดังภาพที่ 2.1



ภาพที่ 2.1 แสดงรูปสามเหลี่ยมด้านไม่เท่า  $ABC$  ที่บรรจุอยู่ภายในรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก  $ADC$

ที่มา : <https://doi.org/10.5539/jmr.v14n5p36>

จากนั้นใช้เอกลักษณ์ทางตรีโกณมิติในการหาสูตรฟังก์ชันขยาย และทำการพิสูจน์ความถูกต้อง โดยนำฟังก์ชันขยายทั้งสองไปแทนค่าในกฎของโคไซน์ (Law of Cosines) เพื่อพิสูจน์ว่าสมการสามารถลดรูปกลับมาเป็นเอกลักษณ์ตรีโกณมิติมาตรฐาน  $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$  ได้เสมอ ซึ่งเป็นการยืนยันว่าสูตรนี้ใช้ได้กับสามเหลี่ยมทุกประเภท

#### 1.4 ความสำคัญและประโยชน์ของบทความ

บทความนี้ปลดล็อกข้อจำกัดด้านความตึงเครียด ช่วยให้สูตรทางคณิตศาสตร์ที่สร้างขึ้นจากฟังก์ชันตรีโกณมิติไม่จำเป็นต้องถูกจำกัดอยู่แค่ในมิติที่ตึงเครียดเท่านั้น สามารถนำไปประยุกต์ใช้ในหลายสาขา

### 2. บทความ เรื่อง Extended Angle Sum and Difference Identity

#### Rules for Scalene Triangles

##### 2.1 จุดมุ่งหมายของบทความ

บทความ เรื่อง Extended Angle Sum and Difference Identity for Scalene Triangles มีจุดมุ่งหมายเพื่อขยายกฎเอกลักษณ์ผลบวกและผลต่างของมุม จากกรณีเฉพาะของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ไปสู่กรณีทั่วไปของรูปสามเหลี่ยมด้านไม่เท่า โดยต้องการพัฒนาสูตรดั้งเดิมที่คุ้นเคย นั่นคือ  $\sin(A \pm B) = \sin(A)\cos(B) \pm \cos(A)\sin(B)$  และ  $\cos(A \pm B) = \cos(A)\cos(B) \mp \sin(A)\sin(B)$  ให้กลายเป็นสูตรขยาย ที่สามารถนำไปใช้กับรูปสามเหลี่ยมด้านไม่เท่าใด ๆ ได้ โดยเพิ่มตัวแปร  $\gamma$  เป็นมุมที่ตรงข้ามกับด้านอ้างอิงเข้าไปในสูตร นอกจากนี้สูตรขยายที่พัฒนาขึ้นนี้สามารถย้อนกลับไปสู่สูตรดั้งเดิมได้เมื่อ  $\gamma = 90^\circ$  (กรณีสามเหลี่ยมมุมฉาก) ซึ่งเป็นการยืนยันความถูกต้องและความสอดคล้องกับทฤษฎีเดิม

##### 2.2 แนวคิดหลักของบทความ

แนวคิดหลักของบทความ คือ การเสนอกฎเอกลักษณ์ขยาย Teia ได้ เสนอทฤษฎีใหม่ 2 ทฤษฎีสำหรับรูปสามเหลี่ยมด้านไม่เท่า ดังนี้

ทฤษฎีบทที่ 1 : กฎเอกลักษณ์ผลบวกของมุม

$$\sin^*(A+B, \gamma) = \sin^*(A, \gamma)\cos^*(B, \gamma) + \cos^*(A, \pi - \gamma)\sin^*(B, \gamma)$$

$$\cos^*(A+B, \gamma) = \cos^*(A, \gamma)\cos^*(B, \gamma) - \sin^*(A, \pi - \gamma)\sin^*(B, \gamma)$$

ทฤษฎีบทที่ 2 : กฎเอกลักษณ์ผลต่างของมุม

$$\sin^*(A-B, \gamma) = \sin^*(A, \gamma)\cos^*(B, \gamma) - \cos^*(A, \pi - \gamma)\sin^*(B, \gamma)$$

$$\cos^*(A-B, \gamma) = \cos^*(A, \gamma)\cos^*(B, \gamma) + \sin^*(A, \pi - \gamma)\sin^*(B, \gamma)$$

โดยฟังก์ชัน  $\sin^*(\alpha, \gamma)$  และ  $\cos^*(\alpha, \gamma)$  ถูกนิยามไว้ในบทความก่อนหน้านี้ จากนั้นผู้เขียนได้พิสูจน์ว่า เมื่อแทนค่าฟังก์ชันขยายลงในสูตรใหม่ แล้วจัดรูปทางพีชคณิตจะได้ผลลัพธ์ที่

สอดคล้องกับสูตรดั้งเดิมกล่าวคือ  $\cos^*(A \pm B, \gamma) = \frac{\cos(A \pm B) + \cos(\gamma) \sin(A \pm B)}{\sin(\gamma)}$  และ

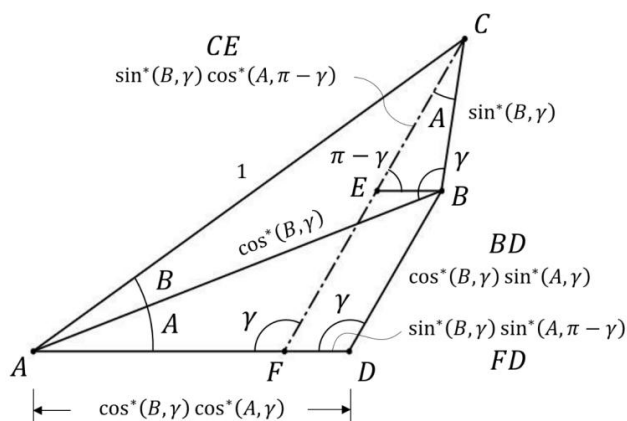
$\sin^*(A \pm B, \gamma) = \frac{\sin(A \pm B)}{\sin(\gamma)}$  ซึ่งเมื่อ  $\gamma = 90^\circ$  จะได้  $\sin(\gamma) = 1$  และ  $\cos(\gamma) = 0$  ทำให้สูตร

ขยายลดรูปกลับไปเป็นสูตรดั้งเดิมทันที

### 2.3 วิธีการที่ใช้ในบทความ

Teia ได้วาดรูปสามเหลี่ยมด้านไม่เท่าซ้อนทับกัน โดยใช้โปรแกรม GeoGebra เพื่อให้เห็นภาพการฉายภาพ (projections) ของด้านต่าง ๆ ดังรูป

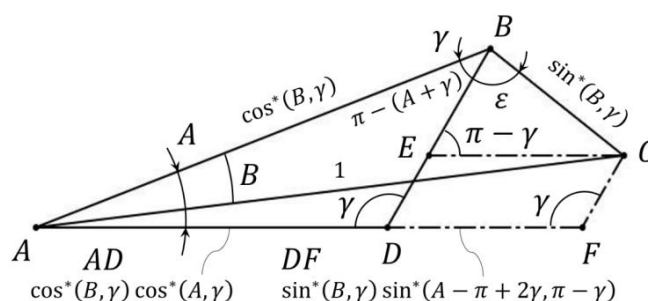
- สำหรับการบวกมุม ดังภาพที่ 2.2 : นำ  $\triangle ABC$  (มุมอ้างอิง  $B$ ) วางซ้อนบน  $\triangle ADB$  (มุมอ้างอิง  $A$ ) ได้  $\triangle AFC$  (มุมอ้างอิง  $A + B$ )



ภาพที่ 2.2 แสดงรูปการหาสูตรการบวกมุม

ที่มา : <https://doi.org/10.5539/jmr.v14n5p21>

- สำหรับการลบมุม ดังภาพที่ 2.3 : นำ  $\triangle ABC$  (มุมอ้างอิง  $B$ ) วางซ้อนบน  $\triangle ADB$  (มุมอ้างอิง  $A$ ) เหมือนภาพที่ 2.2 แต่สะท้อนกลับผ่านด้าน  $AB$  จะได้  $\triangle AFC$  (มุมอ้างอิง  $A - B$ )



ภาพที่ 2.3 แสดงรูปการหาสูตรการลบมุม

ที่มา : <https://doi.org/10.5539/jmr.v14n5p21>

## 2.4 ความสำคัญและประโยชน์ของบทความ

บทความนี้เป็นการเปิดมุมมองใหม่ว่า กฎเอกลักษณ์ผลบวกและผลต่างของมุม ไม่จำเป็นต้องผูกติดกับสามเหลี่ยมมุมฉากเสมอไป ช่วยให้นักเรียนและนักคณิตศาสตร์เข้าใจว่า สูตรดั้งเดิมเป็นเพียง กรณีพิเศษ ของสูตรขยายที่มีตัวแปร  $\gamma$  เพิ่มเข้ามา

## 3. ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

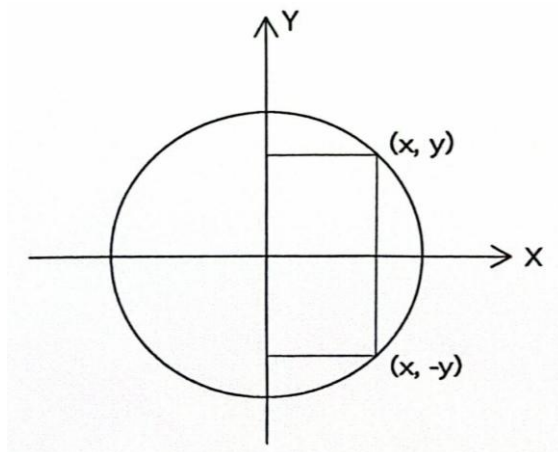
### 3.1 ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์

**นิยาม** กำหนดให้  $(x, y)$  เป็นจุดปลายเส้นโค้งที่ยาว  $\theta$  หน่วย ที่วัดจากจุด  $(1, 0)$  ไปตามแนวเส้นรอบวงของวงกลม 1 หน่วย ฟังก์ชันไซน์ (sine) คือ เซตของคู่อันดับ  $(\theta, y)$  ฟังก์ชันโคไซน์ (cosine) คือ เซตของคู่อันดับ  $(x, \theta)$  จากบทนิยาม จะได้ว่า  $y = \sin \theta$  และ  $x = \cos \theta$

### 3.2 ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์

เมื่อพิจารณา จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว  $\theta$  หน่วย ( $\theta > 0$ ) คือ  $(x, y)$  และจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว  $-\theta$  หน่วย คือ  $(x, -y)$

$$\begin{aligned} \text{สรุปได้ว่า} \quad \cos \theta &= x \quad \text{และ} \quad \cos(-\theta) = x \\ \sin \theta &= y \quad \text{และ} \quad \sin(-\theta) = -y \end{aligned}$$



ภาพที่ 2.4 วงกลมหนึ่งหน่วย

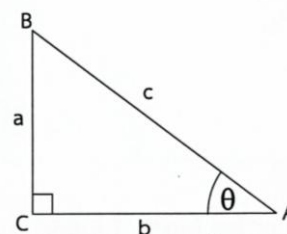
### 3.3 ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงบางจำนวน

ตารางที่ 2.1 แสดงค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงบางจำนวน

| $\theta$                      | 0        | $\frac{\pi}{6}$       | $\frac{\pi}{4}$      | $\frac{\pi}{3}$       | $\frac{\pi}{2}$ |
|-------------------------------|----------|-----------------------|----------------------|-----------------------|-----------------|
| $\sin \theta$                 | 0        | $\frac{1}{2}$         | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$  | 1               |
| $\cos \theta$                 | 1        | $\frac{\sqrt{3}}{2}$  | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$         | 0               |
| $\tan \theta$                 | 0        | $\frac{\sqrt{3}}{3}$  | 1                    | $\sqrt{3}$            | ไม่นิยาม        |
| $\operatorname{cosec} \theta$ | ไม่นิยาม | 2                     | $\sqrt{2}$           | $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ | 1               |
| $\sec \theta$                 | 1        | $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ | $\sqrt{2}$           | 2                     | ไม่นิยาม        |
| $\cot \theta$                 | ไม่นิยาม | $\sqrt{3}$            | 1                    | $\frac{\sqrt{3}}{3}$  | 0               |

### 3.4 ฟังก์ชันตรีโกณมิติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก กำหนดรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก $ABC$ ดังรูปที่ 2.5

ด้าน  $AC$  เรียกว่า ด้านประชิดมุม  $\theta$  ยาว  $b$  หน่วย  
 ด้าน  $BC$  เรียกว่า ด้านประชิดมุม  $\theta$  ยาว  $a$  หน่วย  
 ด้าน  $AB$  เรียกว่า ด้านประชิดมุม  $\theta$  ยาว  $c$  หน่วย



ภาพที่ 2.5 รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

ความสัมพันธ์ของค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติกับความยาวด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากสรุปได้ ดังนี้

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม } \theta}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}} & \text{นั่นคือ } \sin \theta &= \frac{a}{c} \\ \cos \theta &= \frac{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม } \theta}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}} & \text{นั่นคือ } \cos \theta &= \frac{b}{c} \\ \tan \theta &= \frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม } \theta}{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม } \theta} & \text{นั่นคือ } \tan \theta &= \frac{a}{b} \end{aligned}$$

### 3.5 สมการเอกลักษณ์แบบพีทาโกรัส

$$\begin{aligned}\sin^2 \theta + \cos^2 \theta &= 1 \\ 1 + \tan^2 \theta &= \sec^2 \theta \\ 1 + \cot^2 \theta &= \operatorname{cosec}^2 \theta\end{aligned}$$

### 3.6 ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม

การหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงบางจำนวนหรือของมุมบางมุม เราสามารถนำฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม มาใช้ได้ตามความสัมพันธ์ ดังนี้ กำหนดให้  $A$  และ  $B$  เป็นจำนวนจริงหรือมุมสองมุมใด ๆ

$$\begin{aligned}\sin(A \pm B) &= \sin A \cos B \pm \cos A \sin B \\ \cos(A \pm B) &= \cos A \cos B \mp \sin A \sin B \\ \tan(A \pm B) &= \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B} \\ \cot(A \pm B) &= \frac{\cot A \cot B \mp 1}{\cot B \pm \cot A}\end{aligned}$$

### 3.7 ฟังก์ชันตรีโกณมิติของสองเท่า

กำหนดให้  $A$  เป็นจำนวนจริงหรือมุมใด ๆ

$$\begin{aligned}\sin 2A &= 2 \sin A \cos A \\ &= \frac{2 \tan A}{1 + \tan^2 A} \\ \cos 2A &= \cos^2 A - \sin^2 A \\ &= 2 \cos^2 A - 1 \\ &= 1 - 2 \sin^2 A \\ &= \frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A}\end{aligned}$$

### 3.8 ฟังก์ชันตรีโกณมิติของครึ่งเท่า

กำหนดให้  $A$  เป็นจำนวนจริงหรือมุมใด ๆ

$$\begin{aligned}\sin \frac{A}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}} \\ \cos \frac{A}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}}\end{aligned}$$

### บทที่ 3

#### วิธีดำเนินงาน

วิธีการดำเนินงานของโครงการส่วนขยายของฟังกซ์ตรีโกณมิติจากรูปสามเหลี่ยมด้านไม่เท่า โดยไม่ใช้กฎของไซน์ คณะผู้จัดทำได้กำหนดวิธีงานดังนี้

1. ปฏิทินการปฏิบัติงาน
2. ขั้นตอนการดำเนินงาน

#### 1. ปฏิทินการปฏิบัติงาน

| ลำดับที่ | รายการปฏิบัติ                                                                                                                             | ระยะเวลาดำเนินการ     | ผู้รับผิดชอบ |
|----------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|--------------|
| 1        | เลือกหัวข้อโครงการและเสนอคุณครูที่ปรึกษา                                                                                                  | 14 – 19 มิถุนายน 2569 | คณะผู้จัดทำ  |
| 2        | ศึกษาเอกสารและบทความที่เกี่ยวข้องเพื่อทำความเข้าใจหลักการการหาส่วนขยายของฟังกซ์ไซน์และโคไซน์จากรูปสามเหลี่ยมด้านไม่เท่าโดยไม่ใช้กฎของไซน์ | 20 – 30 มิถุนายน 2569 | คณะผู้จัดทำ  |
| 3        | วิเคราะห์และทดสอบหาสูตรส่วนขยายของฟังกซ์ไซน์ และโคไซน์มุมสองเท่า มุมครึ่งเท่าและตรวจสอบความถูกต้อง                                        | 1 – 2 กรกฎาคม 2569    | คณะผู้จัดทำ  |
| 4        | วิเคราะห์และทดสอบหาสูตรส่วนขยายผลบวก ผลต่างฟังกซ์แทนเจนต์ และโคแทนเจนต์และตรวจสอบความถูกต้อง                                              | 3 – 5 กรกฎาคม 2569    | คณะผู้จัดทำ  |
| 5        | จัดทำรายงานโครงการฉบับรูปเล่ม พร้อมเรียบเรียงเนื้อหาให้สมบูรณ์                                                                            | 6 – 10 กรกฎาคม 2569   | คณะผู้จัดทำ  |
| 6        | จัดทำสไลด์และสื่อการนำเสนอผลงาน                                                                                                           | 11 – 15 กรกฎาคม 2569  | คณะผู้จัดทำ  |
| 7        | ตรวจทานความถูกต้องและความเรียบร้อยของรายงานและสื่อ                                                                                        | 16 กรกฎาคม 2569       | คณะผู้จัดทำ  |
| 8        | เตรียมนำเสนอโครงการต่อคุณครูที่ปรึกษา                                                                                                     | 17 – 18 กรกฎาคม 2569  | คณะผู้จัดทำ  |

## 2. ขั้นตอนการดำเนินงาน

### 2.1 เลือกหัวข้อโครงการ

คณะผู้จัดทำร่วมกันพิจารณาและเลือกหัวข้อโครงการกับครูที่ปรึกษา ส่วนขยายของฟังก์ชันตรีโกณมิติจากรูปสามเหลี่ยมด้านไม่เท่า โดยไม่ใช้กฎของไซน์ โดยคำนึงถึงความน่าสนใจ ความสำคัญทางคณิตศาสตร์ และความเป็นไปได้ในการดำเนินการ

### 2.2 ศึกษาบทความและทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

ศึกษาแนวคิดจากบทความ และเอกสารทางคณิตศาสตร์อื่น ๆ เพื่อทำความเข้าใจหลักการ การหาส่วนขยายของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์จากรูปสามเหลี่ยมด้านไม่เท่าโดยไม่ใช้กฎของไซน์ รวมถึงศึกษาฟังก์ชันตรีโกณมิติในรูปแบบอื่น ๆ

### 2.3 ดำเนินการหาสูตรฟังก์ชันส่วนขยายของไซน์ และโคไซน์มุมสองเท่าสำหรับสามเหลี่ยมด้านไม่เท่า

ทำการหาสูตรฟังก์ชันส่วนขยายของไซน์ และโคไซน์มุมสองเท่าตามแนวทางที่ได้ศึกษามา และได้ทำการลดรูปเอกลักษณ์ตรีโกณมิติมุมสองเท่าแบบขยายที่ได้ไปเป็นเอกลักษณ์ตรีโกณมิติมุมสองเท่าแบบดั้งเดิมโดยแทนค่ามุมอ้างอิงเป็น  $90^\circ$  โดยดำเนินการดังนี้ จากข้อมูลพื้นฐานที่ได้ศึกษามา

$$\sin^*(\alpha, \gamma) = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\gamma)} \text{ และ } \cos^*(\alpha, \gamma) = \frac{\sin(\alpha + \gamma)}{\sin(\gamma)} = \cos(\alpha) + \frac{\cos(\gamma)}{\sin(\gamma)} \sin(\alpha)$$

และจากสูตรผลบวกของฟังก์ชันส่วนขยายของไซน์และโคไซน์

$$\sin^*(A + B, \gamma) = \sin^*(A, \gamma) \cos^*(B, \gamma) + \cos^*(A, \pi - \gamma) \sin^*(B, \gamma) \quad (1)$$

$$\cos^*(A + B, \gamma) = \cos^*(A, \gamma) \cos^*(B, \gamma) - \sin^*(A, \pi - \gamma) \sin^*(B, \gamma) \quad (2)$$

ให้  $A = B = \alpha$  ในสมการที่ (1) จะได้

$$\sin^*(2\alpha, \gamma) = \sin^*(\alpha, \gamma) \cos^*(\alpha, \gamma) + \cos^*(\alpha, \pi - \gamma) \sin^*(\alpha, \gamma) \quad (3)$$

ดึงตัวร่วม  $\sin^*(\alpha, \gamma)$  ออกจะได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \sin^*(2\alpha, \gamma) &= \sin^*(\alpha, \gamma) [\cos^*(\alpha, \gamma) + \cos^*(\alpha, \pi - \gamma)] \\ &= \sin^*(\alpha, \gamma) \left[ \cos(\alpha) + \frac{\cos(\gamma)}{\sin(\gamma)} \sin(\alpha) + \cos(\alpha) + \frac{\cos(\pi - \gamma)}{\sin(\pi - \gamma)} \sin(\alpha) \right] \\ &= \sin^*(\alpha, \gamma) \left[ \cos(\alpha) + \frac{\cos(\gamma)}{\sin(\gamma)} \sin(\alpha) + \cos(\alpha) - \frac{\cos(\gamma)}{\sin(\gamma)} \sin(\alpha) \right] \end{aligned}$$

$$\sin^*(2\alpha, \gamma) = 2\sin^*(\alpha, \gamma)\cos(\alpha)$$

เนื่องจาก  $\cos(\alpha) = \cos^*(\alpha, \gamma) - \frac{\cos(\gamma)}{\sin(\gamma)}\sin(\alpha)$  จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\sin^*(2\alpha, \gamma) &= 2\sin^*(\alpha, \gamma) \left[ \cos^*(\alpha, \gamma) - \frac{\cos(\gamma)}{\sin(\gamma)}\sin(\alpha) \right] \\ &= 2\sin^*(\alpha, \gamma)\cos^*(\alpha, \gamma) - 2\sin^*(\alpha, \gamma)\frac{\cos(\gamma)}{\sin(\gamma)}\sin(\alpha) \\ &= 2\sin^*(\alpha, \gamma)\cos^*(\alpha, \gamma) - 2\cos(\gamma)\sin^{*2}(\alpha, \gamma) \quad \blacksquare\end{aligned}$$

ให้  $A = B = \alpha$  ในสมการที่ (2) จะได้

$$\cos^*(2\alpha, \gamma) = \cos^*(\alpha, \gamma)\cos^*(\alpha, \gamma) - \sin^*(\alpha, \pi - \gamma)\sin^*(\alpha, \gamma) \quad (4)$$

พิจารณา  $\sin^*(\alpha, \pi - \gamma)$  จากนิยามของ  $\sin^*(\alpha, \gamma) = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\gamma)}$  จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\sin^*(\alpha, \pi - \gamma) &= \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\pi - \gamma)} \\ &= \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\gamma)} \\ &= \sin^*(\alpha, \gamma)\end{aligned}$$

แทนค่ากลับในสมการที่ (4) จะได้ว่า

$$\cos^*(2\alpha, \gamma) = \cos^{*2}(\alpha, \gamma) - \sin^{*2}(\alpha, \gamma) \quad \blacksquare$$

ต่อไปทำการลดรูปเอกลักษณ์ตรีโกณมิติมุมสองเท่าแบบขยายที่ได้ไปเป็นเอกลักษณ์ตรีโกณมิติมุมสองเท่าแบบดั้งเดิมโดยแทนค่ามุมอ้างอิง  $\gamma = 90^\circ$  จะได้ดังนี้

- $\sin^*(2\alpha, 90^\circ) = 2\sin^*(\alpha, 90^\circ)\cos^*(\alpha, 90^\circ) - 2\cos(90^\circ)\sin^{*2}(\alpha, 90^\circ)$  เนื่องจาก  $\cos 90^\circ = 0$  ทำให้เราได้  $\sin^*(2\alpha) = 2\sin^*(\alpha)\cos^*(\alpha)$
- $\cos^*(2\alpha, 90^\circ) = \cos^{*2}(\alpha, 90^\circ) - \sin^{*2}(\alpha, 90^\circ)$  นั่นคือ  $\cos^*(2\alpha) = \cos^{*2}(\alpha) - \sin^{*2}(\alpha)$

## 2.4 ดำเนินการหาสูตรฟังก์ชันส่วนขยายของไซน์ และโคไซน์มุมครึ่งเท่าสำหรับสามเหลี่ยมด้านไม่เท่า

ทำการหาสูตรฟังก์ชันส่วนขยายของไซน์ และโคไซน์มุมครึ่งเท่าตามแนวทางที่

ได้ศึกษามา และได้ทำการลดรูปเอกลักษณ์ตรีโกณมิติมุมครึ่งเท่าแบบขยายที่ได้ไปเป็นเอกลักษณ์ตรีโกณมิติมุมครึ่งเท่าแบบดั้งเดิมโดยแทนค่ามุมอ้างอิงเป็น  $90^\circ$  โดยดำเนินการดังนี้

จากข้อมูลพื้นฐานที่ได้ศึกษามา

$$\sin^*(\alpha, \gamma) = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\gamma)} \text{ และ } \cos^*(\alpha, \gamma) = \frac{\sin(\alpha + \gamma)}{\sin(\gamma)} = \cos(\alpha) + \frac{\cos(\gamma)}{\sin(\gamma)} \sin(\alpha)$$

แทนค่า  $\alpha = \frac{\alpha}{2}$  ใน  $\sin^*(\alpha, \gamma)$  จะได้ว่า  $\sin^*\left(\frac{\alpha}{2}, \gamma\right) = \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin(\gamma)}$

และจากเอกลักษณ์ตรีโกณมิติ  $\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$  นั่นคือ  $\sin \theta = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos 2\theta}{2}}$

เราจะได้ว่า

$$\sin^*\left(\frac{\alpha}{2}, \gamma\right) = \frac{\pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}}{\sin(\gamma)}$$

จาก  $\cos(\alpha) = \cos^*(\alpha, \gamma) - \sin^*(\alpha, \gamma) \cos \gamma$  และ  $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right), \sin \gamma > 0$  เราจะได้ว่า

$$\sin^*\left(\frac{\alpha}{2}, \gamma\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos^*(\alpha, \gamma) + \sin^*(\alpha, \gamma) \cos \gamma}{2 \sin^2 \gamma}} \quad \blacksquare$$

จาก  $\cos^*(2A, \gamma) = \cos^{*2}(A, \gamma) - \sin^{*2}(A, \gamma)$  แทน  $A = \frac{\alpha}{2}$  และจัดรูปใหม่จะได้

$$\cos^{*2}\left(\frac{\alpha}{2}, \gamma\right) = \cos^*(\alpha, \gamma) + \sin^{*2}\left(\frac{\alpha}{2}, \gamma\right)$$

แทนค่า  $\sin^{*2}\left(\frac{\alpha}{2}, \gamma\right)$  จะได้

$$\cos^{*2}\left(\frac{\alpha}{2}, \gamma\right) = \cos^*(\alpha, \gamma) + \frac{1 - \cos^*(\alpha, \gamma) + \sin^*(\alpha, \gamma) \cos \gamma}{2 \sin^2 \gamma}$$

จัดรูปให้ส่วนเท่ากันและใช้เอกลักษณ์ตรีโกณ  $\cos(2\gamma) = 1 - 2 \sin^2 \gamma$  ทำให้ได้ว่า

$$\cos^{*2}\left(\frac{\alpha}{2}, \gamma\right) = \frac{1 + \cos \gamma \sin^*(\alpha, \gamma) - \cos 2\gamma \cos^*(\alpha, \gamma)}{2 \sin^2 \gamma}$$

$\sin(\alpha + \gamma), \sin \gamma > 0$  เราจะได้ว่า

$$\cos^*\left(\frac{\alpha}{2}, \gamma\right) = \sqrt{\frac{1 + \cos \gamma \sin^*(\alpha, \gamma) - \cos 2\gamma \cos^*(\alpha, \gamma)}{2 \sin^2 \gamma}} \quad \blacksquare$$

ต่อไปทำการลดรูปเอกลักษณ์ตรีโกณมิติมุมสองเท่าแบบขยายที่ได้ไปเป็นเอกลักษณ์ตรีโกณมิติมุมครึ่งเท่าแบบดั้งเดิมโดยแทนค่ามุมอ้างอิง  $\gamma = 90^\circ$  จะได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \bullet \quad \sin^*\left(\frac{\alpha}{2}, 90^\circ\right) &= \sqrt{\frac{1 - \cos^*(\alpha, 90^\circ) + \sin^*(\alpha, 90^\circ) \cos 90^\circ}{2 \sin^2 90^\circ}} \quad \text{เนื่องจาก} \\ \cos 90^\circ &= 0 \text{ และ } \sin 90^\circ = 1 \text{ ทำให้เราได้ } \sin^*\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos^*(\alpha)}{2}} \\ \bullet \quad \cos^*\left(\frac{\alpha}{2}, 90^\circ\right) &= \sqrt{\frac{1 + \cos 90^\circ \sin^*(\alpha, 90^\circ) - \cos 2(90^\circ) \cos^*(\alpha, 90^\circ)}{2 \sin^2 90^\circ}} \\ \text{เนื่องจาก } \cos 90^\circ &= 0, \cos 180^\circ = -1 \text{ และ } \sin 90^\circ = 1 \text{ ทำให้เราได้} \\ \cos^*\left(\frac{\alpha}{2}, 90^\circ\right) &= \sqrt{\frac{1 + \cos^*(\alpha)}{2}} \end{aligned}$$

## 2.5 ดำเนินการหาสูตรผลบวก ผลต่างของฟังก์ชันส่วนขยายของแทนเจนต์สำหรับสามเหลี่ยมด้านไม่เท่า

ทำการหาสูตรผลบวก ผลต่างของฟังก์ชันส่วนขยายของแทนเจนต์สำหรับสามเหลี่ยมด้านไม่เท่าตามแนวทางที่ได้ศึกษามา และได้ทำการลดรูปสูตรผลบวก ผลต่างของฟังก์ชันแทนเจนต์แบบขยายที่ได้ไปเป็นสูตรผลบวก ผลต่างของฟังก์ชันแทนเจนต์แบบดั้งเดิมโดยแทนค่ามุมอ้างอิงเป็น  $90^\circ$  โดยดำเนินการดังนี้

จากข้อมูลพื้นฐานที่ได้ศึกษามา

$$\sin^*(\alpha, \gamma) = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\gamma)} \quad \text{และ} \quad \cos^*(\alpha, \gamma) = \frac{\sin(\alpha + \gamma)}{\sin(\gamma)} = \cos(\alpha) + \frac{\cos(\gamma)}{\sin(\gamma)} \sin(\alpha)$$

และจากสูตรผลบวกของฟังก์ชันส่วนขยายของไซน์และโคไซน์

$$\sin^*(A + B, \gamma) = \sin^*(A, \gamma) \cos^*(B, \gamma) + \cos^*(A, \pi - \gamma) \sin^*(B, \gamma)$$

$$\cos^*(A + B, \gamma) = \cos^*(A, \gamma) \cos^*(B, \gamma) - \sin^*(A, \pi - \gamma) \sin^*(B, \gamma)$$

แทนค่าใน  $\tan^*(A + B, \gamma) = \frac{\sin^*(A + B, \gamma)}{\cos^*(A + B, \gamma)}$  จะได้ว่า

$$\tan^*(A + B, \gamma) = \frac{\sin^*(A, \gamma) \cos^*(B, \gamma) + \cos^*(A, \pi - \gamma) \sin^*(B, \gamma)}{\cos^*(A, \gamma) \cos^*(B, \gamma) - \sin^*(A, \pi - \gamma) \sin^*(B, \gamma)} \quad (5)$$

นำ  $\cos^*(A, \gamma) \cos^*(B, \gamma)$  ไปหารทั้งเศษและส่วนของสมการที่ (5)

พิจารณาตัวเศษ

$$\frac{\sin^*(A, \gamma) \cos^*(B, \gamma)}{\cos^*(A, \gamma) \cos^*(B, \gamma)} + \frac{\cos^*(A, \pi - \gamma) \sin^*(B, \gamma)}{\cos^*(A, \gamma) \cos^*(B, \gamma)} = \tan^*(A, \gamma) + \frac{\cos^*(A, \pi - \gamma)}{\cos^*(A, \gamma)} \tan^*(B, \gamma)$$

พิจารณาตัวส่วน

$$\frac{\cos^*(A, \gamma) \cos^*(B, \gamma)}{\cos^*(A, \gamma) \cos^*(B, \gamma)} - \frac{\sin^*(A, \pi - \gamma) \sin^*(B, \gamma)}{\cos^*(A, \gamma) \cos^*(B, \gamma)} = 1 - \frac{\sin^*(A, \pi - \gamma)}{\cos^*(A, \gamma)} \tan^*(B, \gamma)$$

ดังนั้นเราจะได้ว่า

$$\tan^*(A + B, \gamma) = \frac{\tan^*(A, \gamma) + \frac{\cos^*(A, \pi - \gamma)}{\cos^*(A, \gamma)} \tan^*(B, \gamma)}{1 - \frac{\sin^*(A, \pi - \gamma)}{\cos^*(A, \gamma)} \tan^*(B, \gamma)} \quad (6)$$

เนื่องจาก  $\sin^*(A, \pi - \gamma) = \frac{\sin(A)}{\sin(\pi - \gamma)} = \frac{\sin(A)}{\sin(\gamma)} = \sin^*(A, \gamma)$  แทนค่าในสมการที่ (6) จะได้

$$\tan^*(A + B, \gamma) = \frac{\tan^*(A, \gamma) + \frac{\cos^*(A, \pi - \gamma)}{\cos^*(A, \gamma)} \tan^*(B, \gamma)}{1 - \frac{\sin^*(A, \gamma)}{\cos^*(A, \gamma)} \tan^*(B, \gamma)}$$

$$\text{นั่นคือ } \tan^*(A + B, \gamma) = \frac{\tan^*(A, \gamma) + \frac{\cos^*(A, \pi - \gamma)}{\cos^*(A, \gamma)} \tan^*(B, \gamma)}{1 - \tan^*(A, \gamma) \tan^*(B, \gamma)} \quad \blacksquare$$

แทนค่าใน  $\tan^*(A - B, \gamma) = \frac{\sin^*(A - B, \gamma)}{\cos^*(A - B, \gamma)}$  จะได้ว่า

$$\tan^*(A - B, \gamma) = \frac{\sin^*(A, \gamma) \cos^*(B, \gamma) - \cos^*(A - \pi + 2\gamma, \pi - \gamma) \sin^*(B, \gamma)}{\cos^*(A, \gamma) \cos^*(B, \gamma) + \sin^*(A - \pi + 2\gamma, \pi - \gamma) \sin^*(B, \gamma)} \quad (7)$$

นำ  $\cos^*(A, \gamma) \cos^*(B, \gamma)$  ไปหารทั้งเศษและส่วนของสมการที่ (7)

พิจารณาตัวเศษ

$$\frac{\sin^*(A, \gamma) \cos^*(B, \gamma)}{\cos^*(A, \gamma) \cos^*(B, \gamma)} - \frac{\cos^*(A - \pi + 2\gamma, \pi - \gamma) \sin^*(B, \gamma)}{\cos^*(A, \gamma) \cos^*(B, \gamma)} = \tan^*(A, \gamma) - \frac{\cos^*(A - \pi + 2\gamma, \pi - \gamma)}{\cos^*(A, \gamma)} \tan^*(B, \gamma)$$

พิจารณาตัวส่วน

$$\frac{\cos^*(A, \gamma) \cos^*(B, \gamma)}{\cos^*(A, \gamma) \cos^*(B, \gamma)} + \frac{\sin^*(A - \pi + 2\gamma, \pi - \gamma) \sin^*(B, \gamma)}{\cos^*(A, \gamma) \cos^*(B, \gamma)} = 1 + \frac{\sin^*(A - \pi + 2\gamma, \pi - \gamma)}{\cos^*(A, \gamma)} \tan^*(B, \gamma)$$

ดังนั้นเราจะได้ว่า

$$\tan^*(A - B, \gamma) = \frac{\tan^*(A, \gamma) - \frac{\cos^*(A - \pi + 2\gamma, \pi - \gamma)}{\cos^*(A, \gamma)} \tan^*(B, \gamma)}{1 + \frac{\sin^*(A - \pi + 2\gamma, \pi - \gamma)}{\cos^*(A, \gamma)} \tan^*(B, \gamma)} \quad (8)$$

เนื่องจาก  $\cos^*(A - \pi + 2\gamma, \pi - \gamma) = \frac{\sin(A - \pi + 2\gamma + \pi - \gamma)}{\sin(\pi - \gamma)} = \frac{\sin(A + \gamma)}{\sin(\gamma)} = \cos^*(A, \gamma)$

แทนค่าในสมการที่ (8) จะได้

$$\tan^*(A-B, \gamma) = \frac{\tan^*(A, \gamma) - \frac{\cos^*(A, \gamma)}{\cos^*(A, \gamma)} \tan^*(B, \gamma)}{1 + \frac{\sin^*(A - \pi + 2\gamma, \pi - \gamma)}{\cos^*(A, \gamma)} \tan^*(B, \gamma)}$$

$$\text{นั่นคือ } \tan^*(A-B, \gamma) = \frac{\tan^*(A, \gamma) - \tan^*(B, \gamma)}{1 + \frac{\sin^*(A - \pi + 2\gamma, \pi - \gamma)}{\cos^*(A, \gamma)} \tan^*(B, \gamma)}$$

ต่อไปทำการลดรูปสูตรผลบวก ผลต่างของฟังก์ชันส่วนขยายของแทนเจนต์ที่ได้ไปเป็นสูตรผลบวก ผลต่างของฟังก์ชันแทนเจนต์แบบดั้งเดิมโดยแทนค่ามุมอ้างอิงเป็น  $90^\circ$  จะได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \bullet \quad \tan^*(A+B, 90^\circ) &= \frac{\tan^*(A, 90^\circ) + \tan^*(B, 90^\circ)}{1 - \frac{\sin^*(A, 90^\circ)}{\cos^*(A, 90^\circ)} \tan^*(B, 90^\circ)} \\ &= \frac{\tan^*(A, 90^\circ) + \tan^*(B, 90^\circ)}{1 - \tan^*(A, 90^\circ) \tan^*(B, 90^\circ)} \end{aligned}$$

$$\text{นั่นคือ } \tan^*(A+B) = \frac{\tan^*(A) + \tan^*(B)}{1 - \tan^*(A) \tan^*(B)}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \tan^*(A-B, 90^\circ) &= \frac{\tan^*(A, 90^\circ) - \tan^*(B, 90^\circ)}{1 + \frac{\sin^*(A, 90^\circ)}{\cos^*(A, 90^\circ)} \tan^*(B, 90^\circ)} \\ &= \frac{\tan^*(A, 90^\circ) - \tan^*(B, 90^\circ)}{1 + \tan^*(A, 90^\circ) \tan^*(B, 90^\circ)} \end{aligned}$$

$$\text{นั่นคือ } \tan^*(A-B) = \frac{\tan^*(A) - \tan^*(B)}{1 + \tan^*(A) \tan^*(B)}$$

## 2.6 ดำเนินการหาสูตรผลบวก ผลต่างของฟังก์ชันส่วนขยายของโคแทนเจนต์สำหรับสามเหลี่ยมด้านไม่เท่า

ทำการหาสูตรผลบวก ผลต่างของฟังก์ชันส่วนขยายของโคแทนเจนต์สำหรับสามเหลี่ยมด้านไม่เท่าตามแนวทางที่ได้ศึกษามา และได้ทำการลดรูปสูตรผลบวก ผลต่างของฟังก์ชันโคแทนเจนต์แบบขยายที่ได้ไปเป็นสูตรผลบวก ผลต่างของฟังก์ชันโคแทนเจนต์แบบดั้งเดิมโดยแทนค่ามุมอ้างอิงเป็น  $90^\circ$  โดยดำเนินการดังนี้

จากข้อมูลพื้นฐานที่ได้ศึกษามา

$$\sin^*(\alpha, \gamma) = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\gamma)} \quad \text{และ} \quad \cos^*(\alpha, \gamma) = \frac{\sin(\alpha + \gamma)}{\sin(\gamma)} = \cos(\alpha) + \frac{\cos(\gamma)}{\sin(\gamma)} \sin(\alpha)$$

และจากสูตรผลบวกของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์แบบขยาย

$$\sin^*(A+B, \gamma) = \sin^*(A, \gamma) \cos^*(B, \gamma) + \cos^*(A, \pi - \gamma) \sin^*(B, \gamma)$$

$$\cos^*(A+B, \gamma) = \cos^*(A, \gamma) \cos^*(B, \gamma) - \sin^*(A, \pi - \gamma) \sin^*(B, \gamma)$$

แทนค่าใน  $\cot^*(A+B, \gamma) = \frac{1}{\tan^*(A+B, \gamma)}$  จะได้ว่า

$$\cot^*(A+B, \gamma) = \frac{1 - \tan^*(A, \gamma) \tan^*(B, \gamma)}{\tan^*(A, \gamma) + \frac{\cos^*(A, \pi - \gamma)}{\cos^*(A, \gamma)} \tan^*(B, \gamma)}$$

คูณทั้งเศษและส่วนด้วย  $\cot^*(A, \gamma) \cot^*(B, \gamma)$  ดังนั้น

$$\cot^*(A+B, \gamma) = \frac{\cot^*(A, \gamma) \cot^*(B, \gamma) - 1}{\cot^*(B, \gamma) + \frac{\cos^*(A, \pi - \gamma)}{\cos^*(A, \gamma)} \cot^*(A, \gamma)} \quad \blacksquare$$

แทนค่าใน  $\cot^*(A-B, \gamma) = \frac{1}{\tan^*(A-B, \gamma)}$  จะได้ว่า

$$\cot^*(A-B, \gamma) = \frac{1 + \frac{\sin^*(A - \pi + 2\gamma, \pi - \gamma)}{\cos^*(A, \gamma)} \tan^*(B, \gamma)}{\tan^*(A, \gamma) - \tan^*(B, \gamma)}$$

คูณทั้งเศษและส่วนด้วย  $\cot^*(A, \gamma) \cot^*(B, \gamma)$  ดังนั้น

$$\cot^*(A-B, \gamma) = \frac{\cot^*(A, \gamma) \cot^*(B, \gamma) + \frac{\sin^*(A - \pi + 2\gamma, \pi - \gamma)}{\cos^*(A, \gamma)} \cot^*(A, \gamma)}{\cot^*(B, \gamma) - \cot^*(A, \gamma)} \quad \blacksquare$$

ต่อไปทำการลดรูปสูตรผลบวก ผลต่างของฟังก์ชันส่วนขยายของโคแทนเจนต์ที่ได้ไปเป็นสูตรผลบวก ผลต่างของฟังก์ชันแทนเจนต์แบบดั้งเดิมโดยแทนค่ามุมอ้างอิงเป็น  $90^\circ$  จะได้ดังนี้

$$\bullet \quad \cot^*(A+B, \gamma) = \frac{\cot^*(A, 90^\circ) \cot^*(B, 90^\circ) - 1}{\cot^*(B, 90^\circ) + \frac{\cos^*(A, 90^\circ)}{\cos^*(A, 90^\circ)} \cot^*(A, 90^\circ)}$$

$$\text{นั่นคือ } \cot^*(A+B, \gamma) = \frac{\cot^*(A) \cot^*(B) - 1}{\cot^*(B) + \cot^*(A)}$$

$$\bullet \quad \cot^*(A-B, 90^\circ) = \frac{\cot^*(A, 90^\circ) \cot^*(B, 90^\circ) + \frac{\sin^*(A, 90^\circ)}{\cos^*(A, 90^\circ)} \cot^*(A, 90^\circ)}{\cot^*(B, 90^\circ) - \cot^*(A, 90^\circ)}$$

$$\text{นั่นคือ } \cot^*(A-B, \gamma) = \frac{\cot^*(A) \cot^*(B) + 1}{\cot^*(B) - \cot^*(A)}$$

จากข้อ 2.1 – 2.5 แสดงตารางการเปรียบเทียบสูตรแบบขยาย กับสูตรดั้งเดิมของฟังก์ชันได้ดังต่อไปนี้

ตารางที่ 2.2 แสดงการเปรียบเทียบสูตรแบบขยายกับสูตรดั้งเดิมของเอกลักษณ์ตรีโกณมิติ

| ฟังก์ชัน                                      | สูตรขยาย                                                                                                                                                                  | สูตรดั้งเดิม ( $\gamma = 90^\circ$ )        |
|-----------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------|
| $\sin^*(2\alpha, \gamma)$                     | $2\sin^*(\alpha, \gamma)\cos^*(\alpha, \gamma) - 2\cos(\gamma)\sin^{*2}(\alpha, \gamma)$                                                                                  | $2\sin A \cos A$                            |
| $\cos^*(2\alpha, \gamma)$                     | $\cos^{*2}(\alpha, \gamma) - \sin^{*2}(\alpha, \gamma)$                                                                                                                   | $\cos^2 A - \sin^2 A$                       |
| $\sin^*\left(\frac{\alpha}{2}, \gamma\right)$ | $\sqrt{\frac{1 - \cos^*(\alpha, \gamma) + \sin^*(\alpha, \gamma)\cos \gamma}{2\sin^2 \gamma}}$                                                                            | $\sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$          |
| $\cos^*\left(\frac{\alpha}{2}, \gamma\right)$ | $\sqrt{\frac{1 + \cos \gamma \sin^*(\alpha, \gamma) - \cos 2\gamma \cos^*(\alpha, \gamma)}{2\sin^2 \gamma}}$                                                              | $\sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$          |
| $\tan^*(A+B, \gamma)$                         | $\frac{\tan^*(A, \gamma) + \frac{\cos^*(A, \pi - \gamma)}{\cos^*(A, \gamma)} \tan^*(B, \gamma)}{1 - \tan^*(A, \gamma) \tan^*(B, \gamma)}$                                 | $\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$ |
| $\tan^*(A-B, \gamma)$                         | $\frac{\tan^*(A, \gamma) - \tan^*(B, \gamma)}{1 + \frac{\sin^*(A - \pi + 2\gamma, \pi - \gamma)}{\cos^*(A, \gamma)} \tan^*(B, \gamma)}$                                   | $\frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$ |
| $\cot^*(A+B, \gamma)$                         | $\frac{\cot^*(A, \gamma) \cot^*(B, \gamma) - 1}{\cot^*(B, \gamma) + \frac{\cos^*(A, \pi - \gamma)}{\cos^*(A, \gamma)} \cot^*(A, \gamma)}$                                 | $\frac{\cot A \cot B - 1}{\cot B + \cot A}$ |
| $\cot^*(A-B, \gamma)$                         | $\frac{\cot^*(A, \gamma) \cot^*(B, \gamma) + \frac{\sin^*(A - \pi + 2\gamma, \pi - \gamma)}{\cos^*(A, \gamma)} \cot^*(A, \gamma)}{\cot^*(B, \gamma) - \cot^*(A, \gamma)}$ | $\frac{\cot A \cot B + 1}{\cot B - \cot A}$ |

## 2.7 ตัวอย่างสำหรับการประยุกต์ใช้

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้  $ABC$  เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านไม่เท่าสมมติว่ามุม  $\gamma = 60^\circ$  และ

เราทราบค่าอัตราส่วนพื้นฐานของมุม  $\alpha$  ดังนี้  $\sin^*(\alpha, \gamma) = \frac{3}{5}$ ,  $\cos^*(\alpha, \gamma) = \frac{4}{5}$  จงหา

ค่าของ  $\sin^*(2\alpha, \gamma)$

วิธีทำ วิธีที่ 1 การแก้ด้วยวิธีดั้งเดิม

จากนิยาม  $\sin^*(\alpha, \gamma) = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\gamma)}$  จะได้  $\sin(\alpha) = \frac{3}{5}\sin(60^\circ)$  ดังนั้น

$$\sin(\alpha) = \frac{3\sqrt{3}}{10}$$

จากนิยาม  $\cos^*(\alpha, \gamma) = \frac{\sin(\alpha + \gamma)}{\sin(\gamma)}$  จะได้  $\sin(\alpha + 60^\circ) = \frac{4}{5}\sin(60^\circ)$

ดังนั้น  $\sin(\alpha + 60^\circ) = \frac{2\sqrt{3}}{5}$  จากนั้นกระจายสูตรผลบวกมุมเพื่อหา  $\cos(\alpha)$

$$\sin(\alpha)\cos(60^\circ) + \cos(\alpha)\sin(60^\circ) = \frac{2\sqrt{3}}{5}$$

$$\left(\frac{3\sqrt{3}}{10}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \cos(\alpha)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{5}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{1}{2}$$

แทนค่า  $\cos(\alpha) = \frac{1}{2}$  ในสูตร  $\sin^*(2\alpha, \gamma) = \frac{2\sin(\alpha)\cos(\alpha)}{\sin(\gamma)}$  จะได้ว่า

$$\sin^*(2\alpha, \gamma) = \frac{2\left(\frac{3\sqrt{3}}{10}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{3}{5}$$

วิธีที่ 2 การแก้ด้วยสูตรฟังก์ชันส่วนขยายของไซน์มุมสองเท่า

$$\text{จาก } \sin^*(2\alpha, \gamma) = 2\sin^*(\alpha, \gamma)\cos^*(\alpha, \gamma) - 2\cos(\gamma)\sin^{*2}(\alpha, \gamma)$$

แทนค่า  $\sin^*(\alpha, \gamma) = \frac{3}{5}$ ,  $\cos^*(\alpha, \gamma) = \frac{4}{5}$  และ  $\cos(\gamma) = \cos(60^\circ) = \frac{1}{2}$  จะได้

$$\sin^*(2\alpha, \gamma) = 2\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right) - 2\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{3}{5}$$

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้  $ABC$  เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านไม่เท่าสมมติว่ามุม  $\gamma = 60^\circ$

โดยกำหนดให้  $\tan^*(A, \gamma) = \frac{1}{2}$  และ  $\tan^*(B, \gamma) = \sqrt{3} - 1$  จงหาค่าของ

$$\tan^*(A + B, \gamma)$$

วิธีทำ วิธีที่ 1 การแก้ด้วยวิธีดั้งเดิม

$$\text{จากนิยามฟังก์ชันส่วนขยายของแทนเจนต์ } \tan^*(\alpha, \gamma) = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\alpha + \gamma)}$$

- หาค่าของมุม  $A$  จากที่กำหนดให้  $\tan^*(A, 60^\circ) = \frac{1}{2}$  จะได้ว่า

$$\tan^*(A, 60^\circ) = \frac{\sin(A)}{\sin(A + 60^\circ)}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{\sin(A)}{\sin(A + 60^\circ)}$$

$$\sin(A + 60^\circ) = 2 \sin(A)$$

$$2 \sin(A) = \sin(A) \cos(60^\circ) + \cos(A) \sin(60^\circ)$$

$$2 \sin(A) = \frac{1}{2} \sin(A) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(A)$$

$$3 \sin(A) = \sqrt{3} \cos(A)$$

$$\tan(A) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

ดังนั้น  $A = 30^\circ$  ในทำนองเดียวกัน พิจารณา  $\tan^*(B, \gamma) = \sqrt{3} - 1$  เพื่อหาค่ามุม  $B$  เมื่อแก้สมการตรีโกณจะได้  $B = 45^\circ$  ทำให้เราทราบว่า

$$\alpha = 30^\circ + 45^\circ = 75^\circ \text{ จากนิยามของ } \tan^*(75^\circ, 60^\circ) = \frac{\sin(75^\circ)}{\sin(135^\circ)}$$

จากนั้นหาค่า  $\sin(75^\circ)$  ดังนี้

$$\begin{aligned} \sin(75^\circ) &= \sin(30^\circ + 45^\circ) \\ &= \sin(30^\circ) \cos(45^\circ) + \cos(30^\circ) \sin(45^\circ) \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

และเราทราบว่า  $\sin(135^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$  จะได้ว่า

$$\tan^*(75^\circ, 60^\circ) = \frac{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$$

$$\text{ดังนั้น } \tan^*(A + B, \gamma) = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}$$

วิธีที่ 2 การแก้ด้วยสูตรผลบวกของฟังก์ชันส่วนขยายของแทนเจนต์

$$\text{จากสูตร } \tan^*(A+B, \gamma) = \frac{\tan^*(A, \gamma) + \frac{\cos^*(A, \pi - \gamma)}{\cos^*(A, \gamma)} \tan^*(B, \gamma)}{1 - \tan^*(A, \gamma) \tan^*(B, \gamma)} \quad \text{แทนค่าลง}$$

ในสูตรจะได้ว่า

$$\tan^*(30^\circ + 45^\circ, 60^\circ) = \frac{\tan^*(30^\circ, 60^\circ) + \frac{\cos^*(30^\circ, \pi - 60^\circ)}{\cos^*(30^\circ, 60^\circ)} \tan^*(45^\circ, 60^\circ)}{1 - \tan^*(30^\circ, 60^\circ) \tan^*(45^\circ, 60^\circ)}$$

$$\text{เราทราบว่า } \frac{\cos^*(30^\circ, \pi - 60^\circ)}{\cos^*(30^\circ, 60^\circ)} = \sin(\pi - 30^\circ) = \frac{1}{2} \quad \text{ดังนั้น}$$

$$\tan^*(75^\circ, 60^\circ) = \frac{\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)(\sqrt{3} - 1)}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)(\sqrt{3} - 1)} = \frac{\sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}}$$

$$\text{นั่นคือ } \tan^*(A+B, \gamma) = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}$$

## บทที่ 4

### ผลการดำเนินงาน

จากการดำเนินโครงการคณิตศาสตร์ เรื่อง “ส่วนขยายของฟังก์ชันตรีโกณมิติ จากรูปสามเหลี่ยมด้านไม่เท่า โดยไม่ใช้กฎของไซน์” คณะผู้จัดทำได้ดำเนินการตามแผนที่วางไว้ใน บทที่ 3 โดยเริ่มจากการศึกษาแนวคิดของ Luis Teia เกี่ยวกับส่วนขยายฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ที่สามารถใช้กับสามเหลี่ยมด้านไม่เท่าได้โดยไม่ต้องจำกัอยู่เฉพาะสามเหลี่ยมมุมฉาก และขยายกฎเอกลักษณ์ผลบวกและผลต่างของมุม จากกรณีเฉพาะของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ไปสู่กรณีทั่วไปของรูปสามเหลี่ยมด้านไม่เท่า แล้วจึงนำแนวคิดดังกล่าวมาขยายผลในส่วนขยายของฟังก์ชันตรีโกณมิติจากรูปสามเหลี่ยมด้านไม่เท่า โดยไม่ใช้กฎของไซน์ เพื่อหาสูตรฟังก์ชันส่วนขยายของไซน์ และโคไซน์มุมสองเท่า มุมครึ่งเท่า สูตรผลบวก ผลต่างของฟังก์ชันส่วนขยายของแทนเจนต์ และโคแทนเจนต์ จึงได้นำผลการดำเนินงานเหล่านั้นมาสรุปเป็นสูตรแบบขยาย ตามเป้าหมายหลักของโครงการนี้ ดังนี้

1. สูตรฟังก์ชันส่วนขยายของไซน์ และโคไซน์มุมสองเท่า คือ

$$\begin{aligned}\sin^*(2\alpha, \gamma) &= 2\sin^*(\alpha, \gamma)\cos^*(\alpha, \gamma) - \cos(\gamma)2\sin^{*2}(\alpha, \gamma) \\ \cos^*(2\alpha, \gamma) &= \cos^{*2}(\alpha, \gamma) - \sin^{*2}(\alpha, \gamma)\end{aligned}$$

2. สูตรฟังก์ชันส่วนขยายของไซน์ และโคไซน์มุมครึ่งเท่า คือ

$$\begin{aligned}\sin^*\left(\frac{\alpha}{2}, \gamma\right) &= \sqrt{\frac{1 - \cos^*(\alpha, \gamma) + \sin^*(\alpha, \gamma)\cos\gamma}{2\sin^2\gamma}} \\ \cos^*\left(\frac{\alpha}{2}, \gamma\right) &= \sqrt{\frac{1 + \cos\gamma\sin^*(\alpha, \gamma) - \cos 2\gamma\cos^*(\alpha, \gamma)}{2\sin^2\gamma}}\end{aligned}$$

3. สูตรผลบวก ผลต่างของฟังก์ชันส่วนขยายของแทนเจนต์ และโคแทนเจนต์ คือ

$$\begin{aligned}\tan^*(A+B, \gamma) &= \frac{\tan^*(A, \gamma) + \frac{\cos^*(A, \pi - \gamma)}{\cos^*(A, \gamma)}\tan^*(B, \gamma)}{1 - \tan^*(A, \gamma)\tan^*(B, \gamma)} \\ \tan^*(A-B, \gamma) &= \frac{\tan^*(A, \gamma) - \tan^*(B, \gamma)}{1 + \frac{\sin^*(A - \pi + 2\gamma, \pi - \gamma)}{\cos^*(A, \gamma)}\tan^*(B, \gamma)} \\ \cot^*(A+B, \gamma) &= \frac{\cot^*(A, \gamma)\cot^*(B, \gamma) - 1}{\cot^*(B, \gamma) + \frac{\cos^*(A, \pi - \gamma)}{\cos^*(A, \gamma)}\cot^*(A, \gamma)}\end{aligned}$$

$$\cot^*(A-B, \gamma) = \frac{\cot^*(A, \gamma)\cot^*(B, \gamma) + \frac{\sin^*(A-\pi+2\gamma, \pi-\gamma)}{\cos^*(A, \gamma)}\cot^*(A, \gamma)}{\cot^*(B, \gamma) - \cot^*(A, \gamma)}$$

เพื่อตรวจสอบความถูกต้องของสูตร คณะผู้จัดทำได้ทำการลดรูปสูตรแบบขยายไปเป็นสูตรดั้งเดิมโดยการแทนค่ามุมปรับเปลี่ยนเป็น  $90^\circ$  ( $\gamma = 90^\circ$ ) พบว่าสูตรแบบขยายสามารถลดรูปเป็นสูตรดั้งเดิมได้ นอกจากนี้ คณะผู้จัดทำยังแสดงเจตจำนงสำหรับการนำไปใช้ โดยการนำสูตรแบบขยายที่คณะผู้จัดทำได้คิดขึ้นไปช่วยในการแก้ปัญหาอีกด้วย

ดังนั้น ผลการดำเนินงานของโครงการคณิตศาสตร์นี้สามารถตอบวัตถุประสงค์ที่ตั้งไว้ได้อย่างครบถ้วน

## บทที่ 5

### สรุปและอภิปรายผล

#### สรุปผลการดำเนินงาน

โครงการคณิตศาสตร์ เรื่อง ส่วนขยายของฟังก์ชันตรีโกณมิติจากรูปสามเหลี่ยมด้านไม่เท่า โดยไม่ใช้กฎของไซน์ มีวัตถุประสงค์หลักคือ เพื่อหาสูตรของฟังก์ชันส่วนขยายของไซน์และโคไซน์มุมสองเท่า มุมครึ่งเท่า และสูตรผลบวก ผลต่างของฟังก์ชันส่วนขยายของแทนเจนต์และโคแทนเจนต์ จากรูปสามเหลี่ยมด้านไม่เท่าโดยไม่ใช้กฎของไซน์ จากการดำเนินการศึกษาตามวิธีการทางพีชคณิตและสมบัติของฟังก์ชันตรีโกณมิติ คณะผู้จัดทำได้ประสบความสำเร็จในการหาสูตรของฟังก์ชันส่วนขยายของไซน์ และโคไซน์มุมสองเท่า และสูตรผลบวก ผลต่างของฟังก์ชันส่วนขยายของแทนเจนต์ และโคแทนเจนต์ คือ

1. สูตรของฟังก์ชันส่วนขยายของไซน์ และโคไซน์มุมสองเท่า คือ

$$\sin^*(2\alpha, \gamma) = 2\sin^*(\alpha, \gamma)\cos^*(\alpha, \gamma) - 2\cos(\gamma)\sin^{*2}(\alpha, \gamma)$$

$$\cos^*(2\alpha, \gamma) = \cos^{*2}(\alpha, \gamma) - \sin^{*2}(\alpha, \gamma)$$

2. สูตรฟังก์ชันส่วนขยายของไซน์ และโคไซน์มุมครึ่งเท่า คือ

$$\sin^*\left(\frac{\alpha}{2}, \gamma\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos^*(\alpha, \gamma) + \sin^*(\alpha, \gamma)\cos\gamma}{2\sin^2\gamma}}$$

$$\cos^*\left(\frac{\alpha}{2}, \gamma\right) = \sqrt{\frac{1 + \cos\gamma\sin^*(\alpha, \gamma) - \cos 2\gamma\cos^*(\alpha, \gamma)}{2\sin^2\gamma}}$$

3. สูตรผลบวก ผลต่างของฟังก์ชันส่วนขยายของแทนเจนต์ และโคแทนเจนต์ คือ

$$\tan^*(A+B, \gamma) = \frac{\tan^*(A, \gamma) + \frac{\cos^*(A, \pi - \gamma)}{\cos^*(A, \gamma)}\tan^*(B, \gamma)}{1 - \tan^*(A, \gamma)\tan^*(B, \gamma)}$$

$$\tan^*(A-B, \gamma) = \frac{\tan^*(A, \gamma) - \tan^*(B, \gamma)}{1 + \frac{\sin^*(A - \pi + 2\gamma, \pi - \gamma)}{\cos^*(A, \gamma)}\tan^*(B, \gamma)}$$

$$\cot^*(A+B, \gamma) = \frac{\cot^*(A, \gamma)\cot^*(B, \gamma) - 1}{\cot^*(B, \gamma) + \frac{\cos^*(A, \pi - \gamma)}{\cos^*(A, \gamma)}\cot^*(A, \gamma)}$$

$$\cot^*(A-B, \gamma) = \frac{\cot^*(A, \gamma)\cot^*(B, \gamma) + \frac{\sin^*(A-\pi+2\gamma, \pi-\gamma)}{\cos^*(A, \gamma)}\cot^*(A, \gamma)}{\cot^*(B, \gamma) - \cot^*(A, \gamma)}$$

สูตรนี้สามารถตอบวัตถุประสงค์ของโครงการได้อย่างครบถ้วนและสมบูรณ์ และสามารถลดรูปเป็นสูตรดั้งเดิมโดยการแทนค่ามุมปรับเปลี่ยนเป็น  $90^\circ$  ( $\gamma = 90^\circ$ )

### อภิปรายผลการดำเนินงาน

จากการดำเนินโครงการในการหาสูตรของฟังก์ชันส่วนขยายของไซน์และโคไซน์มุมสองเท่า สำหรับรูปสามเหลี่ยมด้านไม่เท่า ซึ่งได้ผลคือ

$$\begin{aligned}\sin^*(2\alpha, \gamma) &= 2\sin^*(\alpha, \gamma)\cos^*(\alpha, \gamma) - 2\cos(\gamma)\sin^{*2}(\alpha, \gamma) \text{ และ} \\ \cos^*(2\alpha, \gamma) &= \cos^{*2}(\alpha, \gamma) - \sin^{*2}(\alpha, \gamma)\end{aligned}$$

คณะผู้จัดทำพบข้อสังเกตว่าในส่วนของสูตร  $\cos^*(2\alpha, \gamma)$  จะยังคงรักษาโครงสร้างรูปแบบเดิมของตรีโกณมิติมุมฉากเอาไว้ แต่ในส่วนของสูตร  $\sin^*(2\alpha, \gamma)$  มีพจน์ส่วนเกินที่เพิ่มขึ้นมาคือ  $-2\cos(\gamma)\sin^{*2}(\alpha, \gamma)$  ซึ่งพจน์ที่เพิ่มขึ้นมานี้เป็นผลโดยตรงจากการปรับเปลี่ยนของมุม  $\gamma$  ในสามเหลี่ยมด้านไม่เท่า ทั้งนี้เมื่อทำการตรวจสอบความสอดคล้องทางคณิตศาสตร์โดยแทนค่า  $\gamma = 90^\circ$  ซึ่งทำให้ค่า  $\cos 90^\circ = 0$  พบว่าพจน์ส่วนเกินในสูตรไซน์มุมสองเท่าจะกลายเป็นศูนย์และส่งผลให้สูตรขยายทั้งสองลดรูปกลับไปเป็นสูตรตรีโกณมิติพื้นฐานเดิม

ในส่วนของ สูตรฟังก์ชันส่วนขยายของไซน์และโคไซน์มุมครึ่งเท่า พบว่าสูตรที่ได้มีโครงสร้างคล้ายกับสูตรมุมครึ่งเท่าแบบดั้งเดิม แต่มีพจน์เพิ่มเติมที่เกี่ยวข้องกับมุม  $\gamma$  เพื่อปรับค่าให้สอดคล้องกับนิยามของฟังก์ชันส่วนขยายในรูปสามเหลี่ยมด้านไม่เท่า เมื่อแทนค่า  $\gamma = 90^\circ$  สูตรส่วนขยายจะลดรูปเป็นสูตรมุมครึ่งเท่าของไซน์และโคไซน์แบบดั้งเดิมทันที สิ่งนี้แสดงให้เห็นว่าสูตรที่พัฒนาขึ้นมีความถูกต้องทางคณิตศาสตร์ มีความสอดคล้องกับเอกลักษณ์ตรีโกณมิติเดิม และสามารถนำไปใช้เป็นพื้นฐานในการศึกษาฟังก์ชันตรีโกณมิติส่วนขยายในรูปแบบอื่นต่อไป

ในส่วนของ สูตรผลบวก และผลต่างของฟังก์ชันส่วนขยายของแทนเจนต์ และโคแทนเจนต์ คณะผู้จัดทำได้นิยามและจัดรูปโดยอาศัยนิยามฟังก์ชันขยายของ Luis Teia ซึ่งพบประเด็นสำคัญดังนี้ :

1. พจน์ส่วนเกินที่เพิ่มขึ้นมาในสูตร  $\tan^*(A+B)$  และ  $\tan^*(A-B)$  คือ

$\frac{\cos^*(A, \pi - \gamma)}{\cos^*(A, \gamma)}$  และ  $\frac{\sin^*(A - \pi + 2\gamma, \pi - \gamma)}{\cos^*(A, \gamma)}$  ตามลำดับ พจน์เหล่านี้ทำหน้าที่เป็นตัวชดเชย

ความเอียงและความยาวด้านในรูปสามเหลี่ยมด้านไม่เท่าที่ไม่ได้ตั้งฉากกัน

2. เมื่อทดลองกำหนดให้สามเหลี่ยมเป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยแทนค่า  $\gamma = 90^\circ$  ส่งผลให้มุม  $\pi - \gamma$  กลายเป็น  $90^\circ$  ด้วย ซึ่งค่าอัตราส่วนฟังก์ชันขยายที่เป็นพจน์ปรับค่าเหล่านี้จะลดรูปกลายเป็น 1 ทำให้สูตรขยายทั้งหมดยุบรวมกลับมาเป็นสูตรผลบวก และผลต่างมุมของแทนเจนต์ และโคแทนเจนต์แบบดั้งเดิม

## ประโยชน์ที่ได้รับจากการดำเนินงาน

การดำเนินโครงการคณิตศาสตร์ครั้งนี้ ทำให้ผู้จัดทำเกิดความเข้าใจเกี่ยวกับแนวคิดของฟังก์ชันตรีโกณมิติแบบดั้งเดิม และแบบขยาย รวมทั้งเห็นถึงประโยชน์ของสูตรที่ได้ในการนำไปใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาได้

## ข้อเสนอแนะ

สร้าง Algorithm หรือ Web App ที่ใช้ฟังก์ชัน  $\sin^*$  และ  $\cos^*$  ในการหาความยาวด้านและมุมของสามเหลี่ยมด้านไม่เท่า โดยเปรียบเทียบความเร็วและจำนวนขั้นตอนกับการใช้กฎของไซน์ และโคไซน์ แบบดั้งเดิม

## บรรณานุกรม

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2563). หนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เล่ม 2. กรุงเทพฯ: สกสค.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2562). หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 2. กรุงเทพฯ: สกสค.

Teia, L. (2022c). Extended Sine and Cosine Functions for Scalene Triangles. *Journal of Mathematics Research*, 14(5), 36 – 45.  
<https://doi.org/10.5539/jmr.v14n5p36>

Teia, L. (2022d). Extended Angle Sum and Difference Identity Rules for Scalene Triangles. *Journal of Mathematics Research*, 14(5), 21 – 35.  
<https://doi.org/10.5539/jmr.v14n5p36>

ภาคผนวก



$$\sin \theta = \frac{\text{ข้าง}}{\text{ وتر }} = \frac{a}{c}$$

$$\cos \theta = \frac{\text{ติด}}{\text{ وتر }} = \frac{b}{c}$$

$$\tan \theta = \frac{\text{ข้าง}}{\text{ ติด }} = \frac{a}{b}$$

สูตรพีทาโกรัส

$$c^2 = a^2 + b^2$$



ตัวอย่าง



$$\sin \theta = \frac{3}{5}$$

$$\sin B = \frac{4}{5}$$

$$\cos \theta = \frac{4}{5}$$

$$\cos B = \frac{3}{5}$$

$$\tan \theta = \frac{3}{4}$$

$$\tan B = \frac{4}{3}$$



$$\sin 0^\circ = \frac{\sqrt{0}}{2} = 0$$

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 0^\circ = \frac{\sqrt{4}}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\cos 60^\circ = \frac{\sqrt{1}}{2}$$

$$\sin 30^\circ = \frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\sin 90^\circ = \frac{\sqrt{4}}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\cos 90^\circ = \frac{\sqrt{0}}{2} = 0$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$\tan \theta = \frac{\text{ข้าง}}{\text{ ติด }} = \left( \frac{\sin}{\cos} \right) = \frac{\frac{\text{ข้าง}}{\text{ وتر }}}{\frac{\text{ติด}}{\text{ وتر }}} = \frac{\text{ข้าง}}{\text{ ติด }} \times \frac{\text{ وتر }}{\text{ وتر }} = \frac{\text{ข้าง}}{\text{ ติด }}$$

\*

$$(\sqrt{x})^2 = 9 \cdot \sqrt{x} = x$$

ตัวอย่าง

$$\tan 30^\circ = \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\tan 0^\circ = 0$$

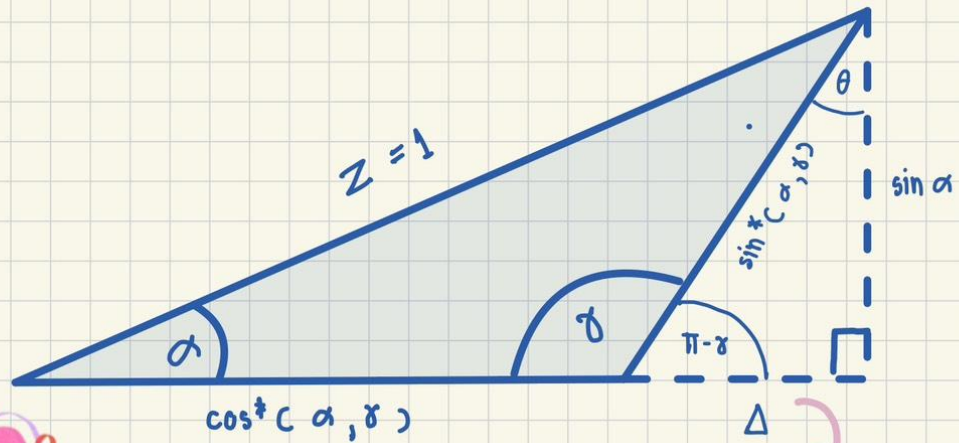
$$\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\tan 45^\circ = 1$$

$$\tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$\tan 90^\circ = \text{ไม่มีค่า}$$



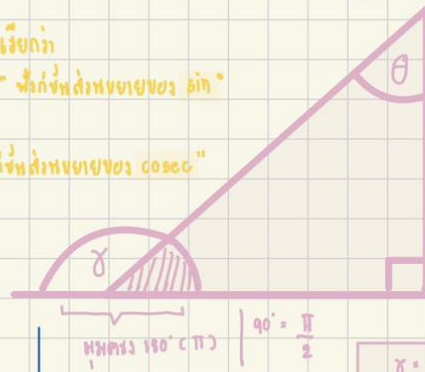


$$\cos^*(\alpha, \gamma) = \frac{\sin(\alpha + \gamma)}{\sin(\gamma)}$$

เรียก  
"ฟังก์ชันส่วนขยายของ sin"

$$\sin^*(\alpha, \gamma) = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\gamma)}$$

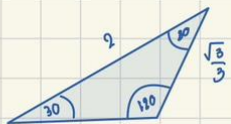
"ฟังก์ชันส่วนขยายของ cosc"



ที่มาของฟังก์ชันส่วนขยายของ sin

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \sin \alpha \\ \sin^*(\alpha, \gamma) &= \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} \\ \sin \alpha &= \cos(\gamma - \frac{\pi}{2}) = \sin^*(\alpha, \gamma) \\ \sin \alpha &= (\cos \gamma \cos \frac{\pi}{2} + \sin \gamma \sin \frac{\pi}{2}) (\sin^*(\alpha, \gamma)) \\ \sin \alpha &= \sin \gamma \times \sin^*(\alpha, \gamma) \\ \sin^*(\alpha, \gamma) &= \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma &= \theta + \frac{\pi}{2} \\ \theta &= \gamma - \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$



ตัวคูณกลับ

$$\sin \theta = \frac{p}{h}$$

$$\cos \theta = \frac{b}{h}$$

$$\tan \theta = \frac{p}{b}$$

$$\operatorname{cosec} \theta = \frac{h}{p}$$

$$\sec \theta = \frac{h}{b}$$

$$\cot \theta = \frac{b}{p}$$

$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

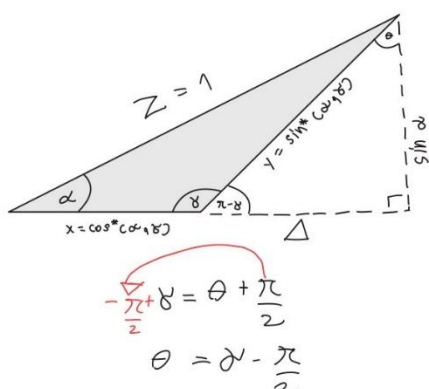
$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

$$\tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$$

$$\sin(2A) = 2 \sin A \cos A$$

$$\cos(2A) = 2 \sin^2 A \cos^2 A$$

๑ ๑๖๖  
๒ ๖๖๖๖๖  
๓ ๖๖๖๖๖๖  
๔ ๖๖๖๖๖๖๖



$$\cos \theta = \frac{\sin \gamma}{(\sin^* \alpha, \gamma)}$$

$$\sin \gamma = (\cos \theta) (\sin^* \alpha, \gamma)$$

$$\sin \gamma = \cos(\theta - \frac{\pi}{2}) \cdot \sin^* \alpha, \gamma$$

$$\sin \gamma = \left( \cos \alpha \cos \frac{\pi}{2} + \sin \alpha \sin \frac{\pi}{2} \right) \cdot \sin^* \alpha, \gamma$$

$$\sin \gamma = \sin \alpha \cdot \sin^* \alpha, \gamma$$

$$\sin^* \alpha, \gamma = \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha}$$