



โครงการคณิตศาสตร์
เรื่อง ความสัมพันธ์ของเส้นมัธยฐานกับด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม

โดย

1. นางสาวสิรภัทรสร อุ่นแก้ว
2. นางสาวขวัญฟ้า น้อยเนาวลักษณ์

ครูที่ปรึกษา 1. นางสาวเบญจมาศ คงตระกูล
2. นางสาวนิลวรรณ นิลยกานนท์

รายงานฉบับนี้เป็นส่วนประกอบของโครงการคณิตศาสตร์
ประเภทสร้างทฤษฎีหรือคำอธิบายทางคณิตศาสตร์
โรงเรียนสอาดเผดิมวิทยา
สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษาสุราษฎร์ธานี ชุมพร
ประจำปี พ.ศ. ๒๕๖๙



โครงการคณิตศาสตร์
เรื่อง ความสัมพันธ์ของเส้นมัธยฐานกับด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม

โดย

1. นางสาวสิริภัทรสร อุ่นแก้ว
2. นางสาวขวัญฟ้า น้อยเนาวลักษณ์

- ครูที่ปรึกษา
1. นางสาวเบญจมาศ คงตระกูล
 2. นางสาวนิลวรรณ นิลยกานนท์

รายงานฉบับนี้เป็นส่วนประกอบของโครงการคณิตศาสตร์
ประเภทสร้างทฤษฎีหรือคำอธิบายทางคณิตศาสตร์
โรงเรียนสอาดเผดิมวิทยา
สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษาสุราษฎร์ธานี ชุมพร
ประจำปี พ.ศ. ๒๕๖๙

โครงการคณิตศาสตร์ เรื่อง ความสัมพันธ์ของเส้นมัธยฐานกับด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม เป็นโครงการคณิตศาสตร์ โดยมีวัตถุประสงค์ดังนี้ 1) เพื่อพิสูจน์ความสัมพันธ์ของเส้นมัธยฐานกับความยาวด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม 2) เพื่อสำรวจความยาวของเส้นมัธยฐานกับด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม ด้วยโปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP) 3) เพื่อหาสมการความยาวของเส้นมัธยฐานเมื่อทราบความยาวด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม

พบว่า ผลรวมค่ากำลังสองของด้านสองด้านใด ๆ ของรูปสามเหลี่ยม เท่ากับ สองเท่าของผลบวกของความยาวของเส้นมัธยฐานยกกำลังสอง กับครึ่งหนึ่งของความยาวด้านที่สามยกกำลังสอง นำไปสู่การหาสมการความยาวของเส้นมัธยฐานเมื่อทราบความยาวด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมได้ นั่นคือ ความยาวของเส้นมัธยฐาน เท่ากับ รากที่สองของสองเท่าของผลบวกกำลังสองของความยาวด้านสองด้าน หักกำลังสองของด้านที่เหลือทั้งหมดหารด้วยสี่

คณะผู้จัดทำ

กิตติกรรมประกาศ

ข

โครงการคณิตศาสตร์เรื่อง เรื่อง ความสัมพันธ์ของเส้นมัธยฐานกับด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม เป็นโครงการ โดยมีคุณครูเบญจมาศ คงตระกูล และคุณครูนิลวรรณ นิลยกานนท์ เป็นครูที่ปรึกษา ให้คำแนะนำข้อมูลในการจัดทำโครงการคณิตศาสตร์ และสถานที่ในการจัดทำโครงการคณิตศาสตร์เป็นอย่างดี ขอขอบพระคุณท่านผู้อำนวยการ นายไกรวัลย์ สังฆะสา และคุณครูทุกท่านในกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ โรงเรียนสอาดเผดิมวิทยา ที่ให้กำลังใจ สอนสั่ง และให้ความรู้ จนทำให้เกิดความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์ สามารถจัดทำโครงการคณิตศาสตร์ได้ ขอขอบคุณทางกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์โรงเรียนสอาดเผดิมวิทยา ที่เปิดโอกาสให้คณะผู้จัดทำได้เข้าร่วมในการแข่งขันครั้งนี้

คณะผู้จัดทำจึงขอขอบพระคุณมา ณ โอกาสนี้ หากมีข้อผิดพลาดประการใด คณะผู้จัดทำต้องขออภัยไว้ ณ ที่นี้ด้วย

สารบัญ

ค

หน้า

บทคัดย่อ	ก
กิตติกรรมประกาศ	ข
สารบัญ	ค
สารบัญตาราง	ง
สารบัญรูปภาพ	จ
บทที่ 1 บทนำ	1
บทที่ 2 เอกสารที่เกี่ยวข้อง	4
บทที่ 3 วิธีการดำเนินการ	10
บทที่ 4 ผลการดำเนินการ	18
บทที่ 5 สรุป อภิปราย และข้อเสนอแนะ	20
บรรณานุกรม	23

สารบัญตาราง

ง

ตารางที่	หน้า
1 พื้นฐานทางเรขาคณิต	4
2 ปฏิทินแสดงการปฏิบัติงาน	10

สารบัญรูปภาพ

จ

ภาพที่		หน้า
1	ประเภทของรูปสามเหลี่ยมแบ่งตามความยาวของด้าน	7
2	ประเภทของรูปสามเหลี่ยมแบ่งตามมุมภายใน	7
3	ภาพฟังก์ชันตรีโกณมิติ	8
4	โปรแกรม The Geometer's Sketchpad หรือ GSP	9
5	รูปประกอบขั้นตอนการใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad หรือ GSP 11 ในการวาดรูปสามเหลี่ยมประเภทต่าง ๆ	
6	การสำรวจความยาวของเส้นมัธยฐานกับด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม ด้วยโปรแกรม 16 The Geometer's Sketchpad (GSP)	

บทที่ 1 บทนำ

ที่มาและความสำคัญของโครงการ

คณิตศาสตร์มีบทบาทสำคัญยิ่งต่อความสำเร็จในการเรียนรู้ในศตวรรษที่ 21 เนื่องจากคณิตศาสตร์ช่วยให้นักเรียนมีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ คิดอย่างมีเหตุผล เป็นระบบ มีแบบแผน สามารถวิเคราะห์ปัญหาหรือสถานการณ์ได้อย่างรอบคอบและถี่ถ้วน ช่วยให้คาดการณ์ วางแผน ตัดสินใจ แก้ปัญหา ได้อย่างถูกต้องเหมาะสมและสามารถนำไปใช้ ในชีวิตจริงได้อย่างมีประสิทธิภาพ นอกจากนี้คณิตศาสตร์ยังเป็นเครื่องมือในการศึกษาด้านวิทยาศาสตร์ เทคโนโลยี และศาสตร์อื่น ๆ อันเป็นรากฐานในการพัฒนาทรัพยากรบุคคลของชาติให้มีความรู้และพัฒนาศูนย์กลางของประเทศให้ทัดเทียมกับนานาชาติ การศึกษาคณิตศาสตร์จึงจำเป็นต้องมีการพัฒนาอย่างต่อเนื่อง เพื่อให้ทันสมัยและสอดคล้องกับสภาพเศรษฐกิจ สังคม และความรู้ทางวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีที่เจริญก้าวหน้าอย่างรวดเร็วในยุคโลกาภิวัตน์ (สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน, กระทรวงศึกษาธิการ, 2560, หน้า 8)

การวัดและเรขาคณิตเป็นสาระหลักที่สำคัญหนึ่ง ในการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ตามหลักสูตรแกนกลางขั้นพื้นฐาน ซึ่งเป็นการเรียนรู้เกี่ยวกับ ความยาว ระยะทาง น้ำหนัก พื้นที่ ปริมาตรและความจุเงิน และเวลา หน่วยวัดระบบต่าง ๆ การคาดคะเนเกี่ยวกับการวัด อัตราส่วนตรีโกณมิติ รูปเรขาคณิต และสมบัติของรูปเรขาคณิต การนิยามภาพ แบบจำลองทางเรขาคณิต ทฤษฎีบททางเรขาคณิต การแปลงทางเรขาคณิตในเรื่องการเลื่อนขนาน การสะท้อน การหมุน และการนำความรู้เกี่ยวกับการวัดและเรขาคณิตไปใช้ในสถานการณ์ต่าง ๆ ความรู้เกี่ยวกับเรขาคณิต มีส่วนเกี่ยวข้องสัมพันธ์กับชีวิตประจำวันของมนุษย์เราอย่างมาก เราใช้เรขาคณิตในชีวิตจริงเพื่อทำความเข้าใจ หรืออธิบายสิ่งต่าง ๆ รอบตัว เช่น ใช้เรขาคณิตในการสำรวจพื้นที่สร้างผังเมือง สร้างถนนหนทาง สำรวจโลกและอวกาศหรือบางครั้งเราอาจแทนความคิดหรือสิ่งต่าง ๆ ด้วยรูปเรขาคณิต เรขาคณิตช่วยพัฒนาทักษะที่สำคัญหลายประการ เช่น ทักษะเชิงมิติสัมพันธ์ หรือ ความรู้สึกระเบิด การคิด การให้เหตุผล และการคิดสร้างสรรค์ ซึ่งทักษะเหล่านี้เป็นพื้นฐานการเรียนรู้คณิตศาสตร์เรื่องอื่น ๆ เช่น จำนวน การวัด ตลอดจนเนื้อหาคณิตศาสตร์ขั้นสูงต่อไป นอกจากนี้เรขาคณิตยังเป็นพื้นฐานในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์กับความ รู้แขนงอื่น ๆ อีกด้วย เพื่อให้ผู้เรียนมีความรู้ความเข้าใจเรขาคณิตสามารถใช้ความรู้และเชื่อมโยงความรู้เรขาคณิตกับความรู้แขนงอื่น ๆ ได้

รูปสามเหลี่ยม เป็นรูปทรงหนึ่งในเรขาคณิตที่คณะผู้จัดทำได้ให้ความสนใจ จากวิกิพีเดีย สารานุกรมเสรี ได้ให้คำจำกัดความรูปสามเหลี่ยม ว่า รูปสามเหลี่ยม เป็นหนึ่งในรูปร่างพื้นฐานในเรขาคณิต คือรูปหลายเหลี่ยมซึ่งมี 3 มุมหรือจุดยอด และมี 3 ด้านหรือขอบที่เป็นส่วนของเส้นตรง ในเรขาคณิตแบบยูคลิด จุด 3 จุดใด ๆ ที่ไม่อยู่ในเส้นตรงเดียวกัน จะสามารถสร้างรูปสามเหลี่ยมได้เพียงรูปเดียว และเป็นรูปที่อยู่บนระนาบเดียวกัน คณะผู้จัดทำโครงการได้ลงมือปฏิบัติกิจกรรมการเรียนรู้ต่าง ๆ โดยเริ่มจากกิจกรรมง่าย ๆ ไปสู่สถานการณ์ปัญหาที่ท้าทาย คณะผู้จัดทำโครงการได้ทำการสืบค้น ทดลองและสำรวจ ฝึกการมองภาพ วาดภาพ และเปรียบเทียบรูปร่างในตำแหน่งต่าง ๆ เพื่อความรวดเร็วในการจำลองภาพและการสำรวจ คณะ

ผู้จัดทำโครงการได้ใช้ โปรแกรม The Geometer's Sketchpad หรือ GSP ซึ่งเป็นโปรแกรมสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ ใช้สำหรับการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ โดยบูรณาการสาระที่เกี่ยวข้องกับความรู้คณิตศาสตร์ และทักษะด้านเทคโนโลยีเข้าด้วยกัน ใช้ในการสร้างรูปสามเหลี่ยมประเภทต่าง ๆ คณะผู้จัดทำมีความสนใจในทฤษฎีบทพีทาโกรัส เกี่ยวกับความสัมพันธ์ของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ทำให้มีความสงสัยใคร่รู้ในการ พิสูจน์ สำรวจ ความสัมพันธ์ของด้านสามเหลี่ยมในรูปแบบอื่นอื่นที่หลากหลายยิ่งขึ้น จึงนำไปสู่การ พิสูจน์ เพื่อหาสมการความสัมพันธ์ของเส้นมัธยฐานและด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมต่อไป

วัตถุประสงค์

1. เพื่อพิสูจน์ความสัมพันธ์ของเส้นมัธยฐานกับความยาวด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม
2. เพื่อสำรวจความยาวของเส้นมัธยฐานกับด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม ด้วยโปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP)
3. เพื่อหาสมการความยาวของเส้นมัธยฐานเมื่อทราบความยาวด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม

สาระที่เกี่ยวข้อง

1. พื้นฐานทางมิติของเรขาคณิต
2. รูปสามเหลี่ยม
3. โปรแกรม The Geometer's Sketchpad หรือ GSP
4. ตรรกะคณิต

นิยามศัพท์เฉพาะ

ความสัมพันธ์ของเส้นมัธยฐานกับด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม (The relation of a triangle median and the sides of the triangle) หมายถึง การใช้โปรแกรมคณิตศาสตร์สำเร็จรูป The Geometer's Sketchpad หรือ GSP ในการสืบค้น และสำรวจ และนำไปสู่การพิสูจน์หาสูตรใหม่

ขอบเขตของการศึกษาโครงการ

ตัวแปร

- ตัวแปรต้น : ความยาวด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมใด ๆ
- ตัวแปรตาม : ความยาวเส้นมัธยฐานรูปสามเหลี่ยมใด ๆ

สมมติฐาน

- ผลรวมค่ากำลังสองของด้านสองด้านใด ๆ ของรูปสามเหลี่ยม เท่ากับ สองเท่าของผลบวกของครึ่งหนึ่งของความยาวด้านที่สาม ยกกำลังสองกับความยาวของเส้นมัธยฐานยกกำลังสอง

วันที่ 1 เดือนสิงหาคม พ.ศ.2569 ถึง วันที่ 18 เดือนสิงหาคม พ.ศ.2569

ประโยชน์ที่ได้รับจากการทำโครงการ

1. ได้ฝึกฝนการออกแบบทางเทคโนโลยีสามารถสร้างรูปทางเรขาคณิตด้วยโปรแกรมสำเร็จรูปได้
2. ได้ศึกษาเนื้อหา คณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง ประยุกต์ความรู้กับศาสตร์อื่น ๆ ได้
3. มีความรู้เรื่องรูปสามเหลี่ยม ตรีโกณมิติ ปรับใช้ในชีวิตประจำวันกับความรู้ในเรื่องอื่นๆ หรือสาขาต่างๆ ในระดับสูงๆต่อไป

บทที่ 2 เอกสารที่เกี่ยวข้อง

การทำโครงการคณิตศาสตร์ครั้งนี้ มีการศึกษาค้นคว้าเอกสารและส่วนที่เกี่ยวข้อง ดังนี้

พื้นฐานทางมิติเรขาคณิต

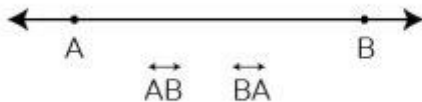
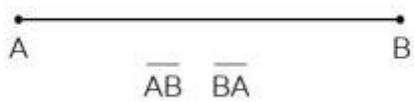
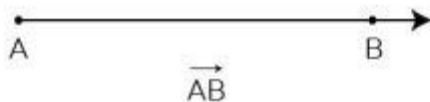
รูปสามเหลี่ยม

ตรีโกณมิติ

โปรแกรม The Geometer's Sketchpad หรือ GSP

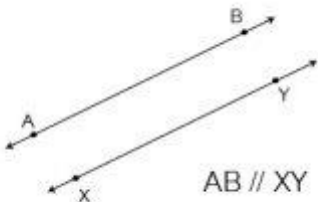
พื้นฐานทางมิติเรขาคณิต

มิติเรขาคณิตกำเนิดขึ้นเพื่อการคำนวณและวัดพื้นที่ แรกเริ่มถูกพัฒนาขึ้นในดินแดนอารยธรรมของโลกจากลุ่มแม่น้ำทั้งสี่คืออารยธรรมอียิปต์ อารยธรรมเมโสโปเตเมีย อารยธรรมลุ่มแม่น้ำสินธุ และอารยธรรมลุ่มแม่น้ำฮวงโห และต่อมานักคณิตศาสตร์ชาวกรีกนาม “ยุคลิด” ได้นำเรขาคณิตมาศึกษาเพิ่มเติมและได้สร้างรากฐานและเครื่องมือทางการคำนวณขึ้นมากมาย หนึ่งในนั้นคือนิยามพื้นฐานของเรขาคณิตเพื่อให้สามารถแก้โจทย์ทางคณิตศาสตร์ได้ และนักคณิตศาสตร์ในยุคต่อๆมาได้นำมาแก้ไขและพัฒนาให้สมบูรณ์ครบถ้วนต่อไป

หัวข้อ	นิยาม/คุณสมบัติ	รูป
จุด	ใช้บอกตำแหน่ง ไม่มีขนาด	
เส้นตรง	มีความยาวไม่จำกัด และไม่มีขนาด ความกว้างของเส้นตรง	
ส่วนของเส้นตรง	เป็นส่วนหนึ่งของเส้นตรงที่มีจุดปลายสองจุด	
รังสี	เป็นส่วนหนึ่งของเส้นตรงซึ่งมีจุดปลายเพียงจุดเดียว	

ตารางที่ 1 พื้นฐานทางมิติเรขาคณิต

หัวข้อ	นิยาม/คุณสมบัติ	รูป
มุม	เป็นรังสีสองเส้นที่มีจุดปลายจุดเดียวกัน เรียกรังสีสองเส้นนี้ว่าแขนของมุม และเรียกจุดปลายว่าจุดยอดมุม	
มุมแหลม	มีขนาดมากกว่า 0 องศาแต่น้อยกว่า 90 องศา	
มุมฉาก	มีขนาด 90 องศา	
มุมป้าน	มีขนาดมากกว่า 90 องศา แต่น้อยกว่า 180 องศา	
มุมตรง	มีขนาด 180 องศา (หรือสองมุมฉาก)	

หัวข้อ	นิยาม/คุณสมบัติ	รูป
มุมกลับ	มีขนาดมากกว่า 180 องศา แต่น้อยกว่า 360 องศา	
เส้นขนาน	เส้นตรงสองเส้นที่อยู่บนระนาบเดียวกัน ก็ต่อเมื่อเส้นตรงทั้งสองเส้นนั้นไม่ตัดกัน	

ตารางที่ 1 พื้นฐานทางมิติเรขาคณิต (ต่อ)

รูปสามเหลี่ยม

รูปสามเหลี่ยม เป็นหนึ่งในรูปร่างพื้นฐานในเรขาคณิต คือรูปหลายเหลี่ยมซึ่งมี 3 มุมหรือจุดยอด และมี 3 ด้านหรือขอบที่เป็นส่วนของเส้นตรง รูปสามเหลี่ยมที่มีจุดยอด A , B , และ C เขียนแทนด้วย $\triangle ABC$

ในเรขาคณิตแบบยูคลิด จุด 3 จุดใด ๆ ที่ไม่อยู่ในเส้นตรงเดียวกัน จะสามารถสร้างรูปสามเหลี่ยมได้เพียงรูปเดียว และเป็นรูปที่อยู่บนระนาบเดียว (เช่นระนาบสองมิติ)

ประเภทของรูปสามเหลี่ยม

แบ่งตามความยาวของด้าน

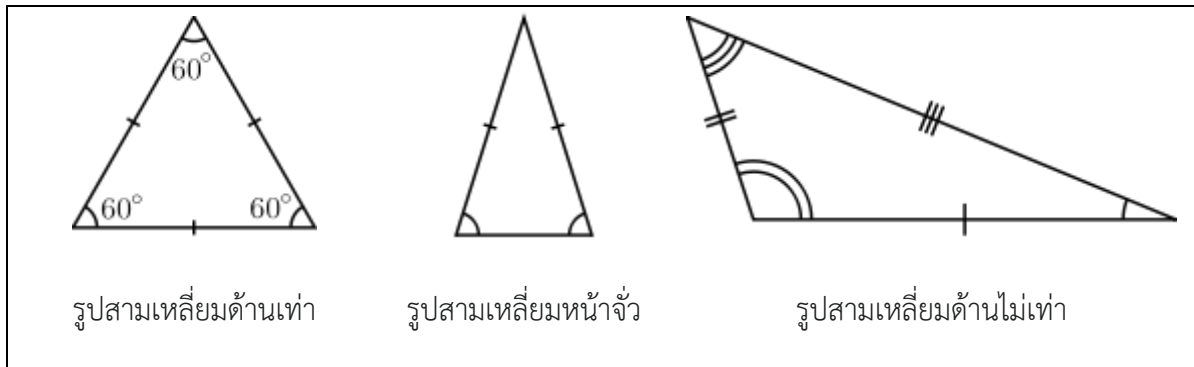
รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า (equilateral) มีด้านทุกด้านยาวเท่ากัน รูปสามเหลี่ยมด้านเท่าเป็นรูปหลายเหลี่ยมมุมเท่า นั่นคือมุมภายในทุกมุมจะมีขนาดเท่ากัน คือ 60° และเป็นรูปหลายเหลี่ยมปกติ

รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว (isosceles) มีด้านสองด้านยาวเท่ากัน (ตามความหมายเริ่มแรกโดยยูคลิด ถึงแม้ว่ารูปสามเหลี่ยมด้านเท่าจะสามารถจัดว่าเป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วได้ด้วย เพราะมีด้านที่ยาวเท่ากันอย่างน้อยสองด้าน) และมีมุมสองมุมขนาดเท่ากัน คือมุมที่ไม่ได้ประกอบด้วยด้านที่เท่ากันทั้งสอง

รูปสามเหลี่ยมด้านไม่เท่า (scalene) ด้านทุกด้านจะมีความยาวแตกต่างกัน มุมภายใน

ก็มีขนาดแตกต่างกันด้วย

7



ภาพที่ 1 ประเภทของรูปสามเหลี่ยมแบ่งตามความยาวของด้าน

แบ่งตามมุมภายใน

รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก (right, right-angled, rectangle) มีมุมภายในมุมหนึ่งมีขนาด 90° (มุมฉาก) ด้านที่อยู่ตรงข้ามกับมุมฉากเรียกว่า *ด้านตรงข้ามมุมฉาก* ซึ่งเป็นด้านที่ยาวที่สุดในรูปสามเหลี่ยม อีกสองด้านเรียกว่า *ด้านประกอบมุมฉาก* ความยาวด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากสัมพันธ์กันตามทฤษฎีบทพีทาโกรัส

รูปสามเหลี่ยมมุมเฉียง (oblique) ไม่มีมุมใดเป็นมุมฉาก ซึ่งอาจหมายถึงรูปสามเหลี่ยมมุมป้านหรือรูปสามเหลี่ยมมุมแหลม

รูปสามเหลี่ยมมุมป้าน (obtuse) มีมุมภายในมุมหนึ่งมีขนาดมากกว่า 90° (มุมป้าน)

รูปสามเหลี่ยมมุมแหลม (acute) มุมภายในทุกมุมมีขนาดเล็กกว่า 90° (มุมแหลม)

รูปสามเหลี่ยมด้านเท่าเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมแหลม แต่รูปสามเหลี่ยมมุมแหลมทุกรูปไม่ได้เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า

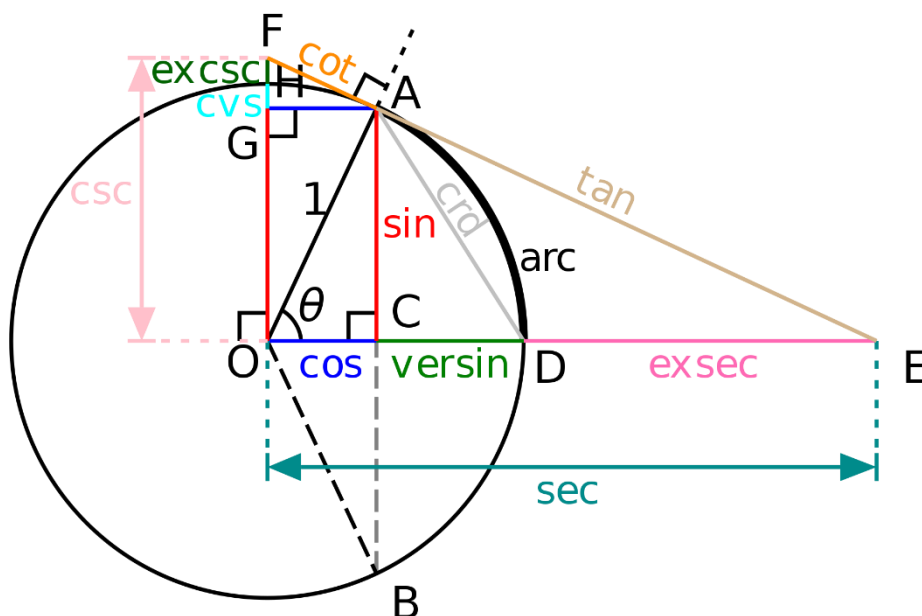


ภาพที่ 2 ประเภทของรูปสามเหลี่ยมแบ่งตามมุมภายใน

ตรีโกณมิติ จากภาษากรีก *trigonon* มุม 3 มุม และ *metro* การวัด เป็นสาขาหนึ่งของคณิตศาสตร์ที่ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างความยาวและมุมของรูปสามเหลี่ยม ตรีโกณมิติเกิดขึ้นในสมัยเฮลเลนิสต์ ในศตวรรษที่ 3 ก่อนคริสต์ศักราช ปัจจุบันได้มีการนำไปใช้ตั้งแต่ในวิชาเรขาคณิตไปจนถึงวิชาดาราศาสตร์

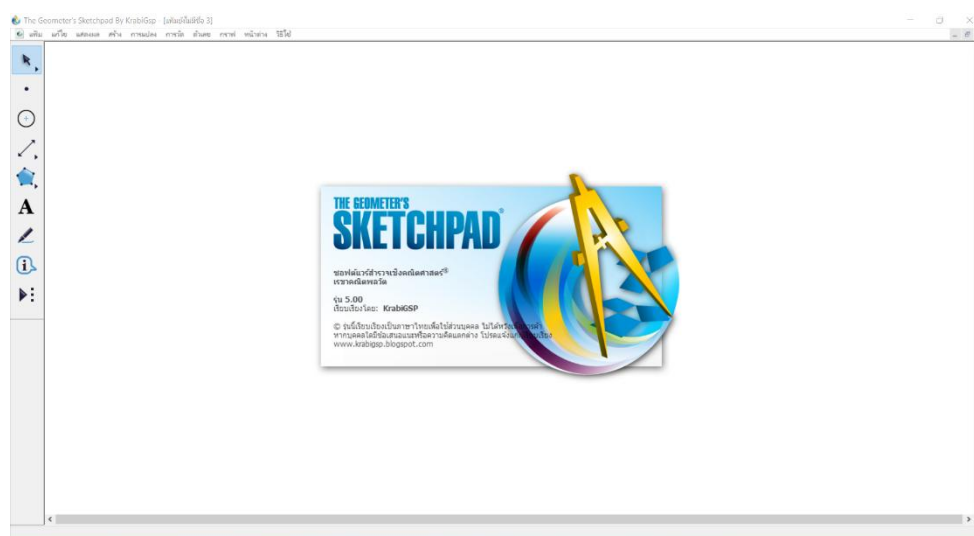
นักดาราศาสตร์ในศตวรรษที่ 3 ได้สังเกตว่าความยาวด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากและมุมระหว่างด้านมีความสัมพันธ์ที่คงที่ ถ้าทราบความยาวอย่างน้อยหนึ่งด้านและค่าของมุมหนึ่งมุม แล้วมุมและความยาวอื่น ๆ ที่เหลือก็สามารถคำนวณหาได้ การคำนวณเหล่านี้ได้ถูกนิยามเป็นฟังก์ชันตรีโกณมิติ และในปัจจุบันได้แพร่หลายไปทั้งคณิตศาสตร์บริสุทธิ์และคณิตศาสตร์ประยุกต์ เช่น การแปลงฟูรีเย หรือสมการคลื่น หรือการใช้ฟังก์ชันตรีโกณมิติเพื่ออธิบายปรากฏการณ์ที่เป็นคาบในสาขาวิชาฟิสิกส์ วิศวกรรมเครื่องกล วิศวกรรมไฟฟ้า ดนตรีและสวนศาสตร์ ดาราศาสตร์ นิเวศวิทยา และชีววิทยา นอกจากนี้ ตรีโกณมิติยังเป็นพื้นฐานของการสำรวจ

ตรีโกณมิติมีความเกี่ยวข้องมากที่สุดกับรูปสามเหลี่ยมมุมฉากบนระนาบ (กล่าวคือ รูปสามเหลี่ยมสองมิติที่มีมุมหนึ่งมีขนาด 90 องศา) มีการประยุกต์ใช้กับรูปสามเหลี่ยมที่ไม่มีมุมฉากด้วย โดยการแบ่งรูปสามเหลี่ยมดังกล่าวเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากสองรูป ปัญหาส่วนมากสามารถแก้ได้โดยใช้การคำนวณบนรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ดังนั้น การประยุกต์ส่วนใหญ่ก็จะเกี่ยวข้องกับรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ยกเว้นในตรีโกณมิติเชิงทรงกลม วิชาที่ศึกษารูปสามเหลี่ยมบนพื้นผิวทรงกลม ซึ่งมีความโค้งเป็นค่าคงที่บวก ในเรขาคณิตอิลลิปติก (elliptic geometry) อันเป็นพื้นฐานของวิชาดาราศาสตร์และการเดินเรือ) ส่วนตรีโกณมิติบนพื้นผิวที่มีความโค้งเป็นค่าลบเป็นส่วนหนึ่งของเรขาคณิตไฮเพอร์โบลิก



ภาพที่ 3 ภาพฟังก์ชันตรีโกณมิติ

โปรแกรม The Geometer's Sketchpad หรือ GSP สำหรับการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ เป็นการบูรณาการสาระที่เกี่ยวข้องกับความรู้คณิตศาสตร์และทักษะด้านเทคโนโลยีเข้าด้วยกัน ทำให้ผู้เรียนมีโอกาสพัฒนาพหุปัญญาอันได้แก่ ปัญญาทางด้านภาษา ด้านตรรกศาสตร์ด้านมิติสัมพันธ์และด้านศิลปะ โปรแกรม GSP มีลักษณะเป็น Dynamic software ที่ช่วยให้ผู้เรียนมีโอกาสเรียนคณิตศาสตร์ โดยการสร้างองค์ความรู้ใหม่ๆ หรือสร้างความคิดรวบยอดต่างๆ ทางคณิตศาสตร์ได้ด้วยตนเอง เนื่องจากเวลาใช้โปรแกรม GSP ผู้เรียนสามารถสร้างตัวแบบคณิตศาสตร์ (Mathematical Model) ที่ทำให้เกิดการเคลื่อนไหวเชิงเรขาคณิต และผู้ใช้สามารถมีปฏิสัมพันธ์โต้ตอบกับโปรแกรมได้ โปรแกรม GSP สามารถนำมาใช้สร้างรูปเรขาคณิตที่เคลื่อนไหวได้ซึ่งนำไปสู่การค้นหาค้นพบต่างๆ ทางเรขาคณิต โดยผู้เรียนสามารถสำรวจ ตั้งข้อสังเกต คาดเดาและสืบเสาะตรวจสอบเพื่อยืนยันเหตุผลของตนเอง ทำให้เกิดจินตนาการในการค้นคว้าหาเหตุผลเป็นการเพิ่มพูนความรู้ให้กับผู้เรียน และพัฒนาความคิดรวบยอดเกี่ยวกับเนื้อหาสาระต่างๆ ในวิชาคณิตศาสตร์ไม่ว่าจะเป็นทางเรขาคณิต พีชคณิต ตรีโกณมิติ แคลคูลัส ได้เป็นอย่างดี นอกจากนี้สำหรับผู้สอนเองก็สามารถนำเอาโปรแกรม GSP มาช่วยเป็นสื่อในการสร้างบรรยากาศของการเรียนการสอนที่ส่งเสริมให้มีการนำเสนอความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์ความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ตลอดจนมีการนำเสนอที่น่าตื่นตาตื่นใจซึ่งทำให้ผู้เรียนเกิดความสนใจ มีการซักถาม การโต้ตอบ ซึ่งจะทำให้ผู้เรียนตั้งข้อคำถามเหตุการณ์และหาข้อสรุปในเวลาเรียนหรือในช่วงเวลานำเสนอได้ซึ่งขอบเขตของการใช้งานโปรแกรมนั้นก็ขึ้นอยู่กับจินตนาการของผู้เรียนเองส่วนประเทศไทยนั้นสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ได้ซื้อลิขสิทธิ์ โปรแกรม GSP เวอร์ชัน 4.06 จากบริษัท Key Curriculum Press เมื่อประมาณปลายปีพ.ศ. 2547 และแปลเป็นภาษาไทย (Thai Version) เพื่อให้สามารถเรียนรู้ได้ง่ายและสะดวกมากขึ้น



ภาพที่ 4 โปรแกรม The Geometer's Sketchpad หรือ GSP

บทที่ 3 วิธีการดำเนินการ

กลุ่มผู้จัดทำโครงการคณิตศาสตร์จะกล่าวถึงวิธีการดำเนินงาน ดังนี้

ปฏิทินการปฏิบัติงาน

ขั้นตอนการดำเนินงาน

ขั้นตอนการพิสูจน์ความสัมพันธ์ของเส้นมัธยฐานกับความยาวด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม

ขั้นตอนการสำรวจความยาวของเส้นมัธยฐานกับด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม ด้วยโปรแกรม The

Geometer's Sketchpad (GSP)

ขั้นตอนการหาสมการความยาวของเส้นมัธยฐานเมื่อทราบความยาวด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม

ปฏิทินการปฏิบัติงาน

ลำดับที่	รายการ	ระยะเวลา	คณะผู้รับผิดชอบ
1	ศึกษาวิธีการทำโครงการคณิตศาสตร์และคิดเรื่องที่จะทำโครงการคณิตศาสตร์	1- 3 สิงหาคม 2569	คณะผู้จัดทำ
2	ประชุมวางแผนการทำโครงการคณิตศาสตร์	4 สิงหาคม 2569	คณะผู้จัดทำ/ครูที่ปรึกษา
3	เขียนเค้าโครง โครงการคณิตศาสตร์	5-6 สิงหาคม 2569	คณะผู้จัดทำ
4	คุณครูที่ปรึกษาแบ่งหน้าที่รับผิดชอบ	7 สิงหาคม 2569	คณะผู้จัดทำ/ครูที่ปรึกษา
5	วางแผนการดำเนินงาน	8 สิงหาคม 2569	คณะผู้จัดทำ/ครูที่ปรึกษา
6	การพิสูจน์ความสัมพันธ์ของเส้นมัธยฐานกับความยาวด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม	9-10 สิงหาคม 2569	คณะผู้จัดทำ
7	การสำรวจความยาวของเส้นมัธยฐานกับด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม ด้วยโปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP)	11 สิงหาคม 2569	คณะผู้จัดทำ
8	การหาสมการความยาวของเส้นมัธยฐานเมื่อทราบความยาวด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม	12 สิงหาคม 2569	คณะผู้จัดทำ
9	จัดทำรายงานและเอกสารรูปเล่มโครงการ	13-14 สิงหาคม 2569	คณะผู้จัดทำ/ครูที่ปรึกษา
10	ทำสื่อนำเสนอประกอบและฝึกซ้อมการนำเสนอโครงการต่อครูที่ปรึกษา	15-16 สิงหาคม 2569	คณะผู้จัดทำ/ครูที่ปรึกษา
11	นำเสนอโครงการต่อคณะกรรมการ	18 สิงหาคม 2569	คณะผู้จัดทำ/ครูที่ปรึกษา

ตารางที่ 2 ปฏิทินแสดงการปฏิบัติงาน

ขั้นตอนในการดำเนินงาน

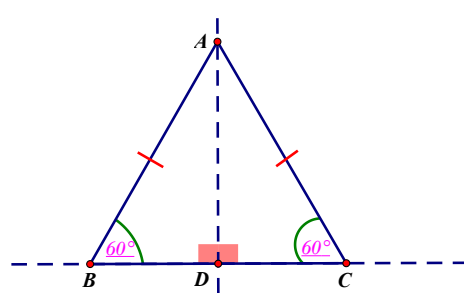
1. คิดหัวข้อโครงการเพื่อนำเสนอครูที่ปรึกษาโครงการ
2. ศึกษาข้อมูลเรื่องที่น่าสนใจคือ เรื่องรูปเรขาคณิตและตรีโกณมิติ

3. รวบรวมข้อมูลที่ได้มาวิเคราะห์เพื่อใช้ในการสร้างรูปสามเหลี่ยม โดยโปรแกรม Geometer's Sketchpad (GSP)

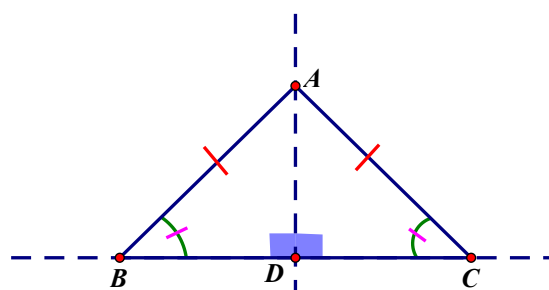
4. การพิสูจน์ความสัมพันธ์ของเส้นมัธยฐานกับความยาวด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม

5. การสำรวจความยาวของเส้นมัธยฐานกับด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม ด้วยโปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP)

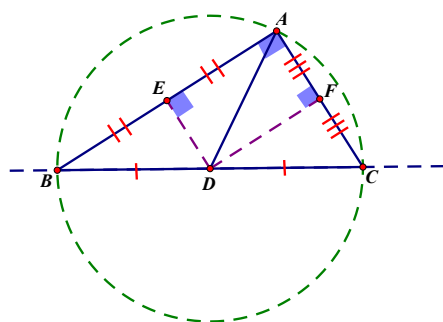
6. การหาสมการความยาวของเส้นมัธยฐานเมื่อทราบความยาวด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม
7. สรุปผลการดำเนินงาน และวิเคราะห์ผลการดำเนินงานทั้งหมด
8. ประเมินงานและตรวจสอบ สรุปผลการดำเนินงาน
9. เขียนรายงานและจัดทำบอร์ดโครงงาน
10. ฝึกเตรียมการนำเสนอโครงงานต่อครูที่ปรึกษา
11. นำเสนอโครงงานต่อคณะกรรมการ



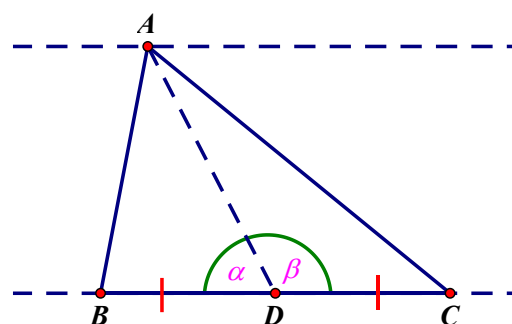
รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า



รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว



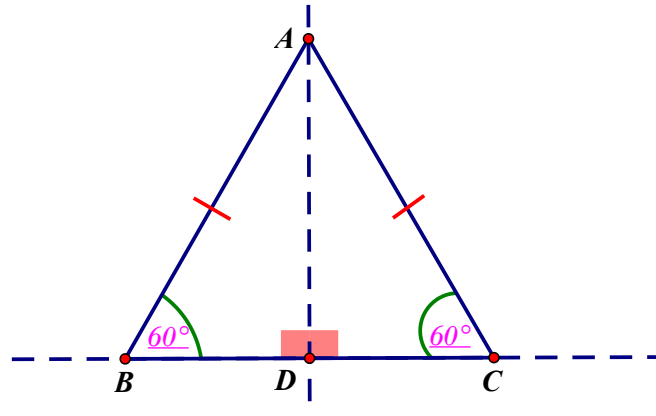
รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก



รูปสามเหลี่ยมใดใด

ภาพที่ 5 รูปประกอบขั้นตอนการใช้ โปรแกรม The Geometer's Sketchpad หรือ GSP ในการวาดรูปสามเหลี่ยมประเภทต่าง ๆ

กำหนดให้ $\triangle ABC$ เป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า มี AD เป็นเส้นตั้งฉากกับ BC



ขั้นตอนการพิสูจน์ว่า $BD = DC$

1. กำหนดให้ AD ตั้งฉากกับ BC (กำหนดให้)
2. $AB = AC$ (คุณสมบัติสามเหลี่ยมหน้าจั่ว)
3. $AD = AD$ (ด้านร่วม)
4. $\triangle ADB \cong \triangle ADC$ (จ.ด.ด)
5. $BD = DC$ (คุณสมบัติการเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม)

AD ตั้งฉากกับ BC และ $BD = DC$ ดังนั้น AD เป็นเส้นมัธยฐาน

พิจารณา $\triangle ADB$ และ $\triangle ADC$ จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส จะได้ว่า

$$AB^2 = AD^2 + BD^2$$

1

$$AC^2 = AD^2 + DC^2$$

2

$$AB^2 + AC^2 = 2AD^2 +$$

1

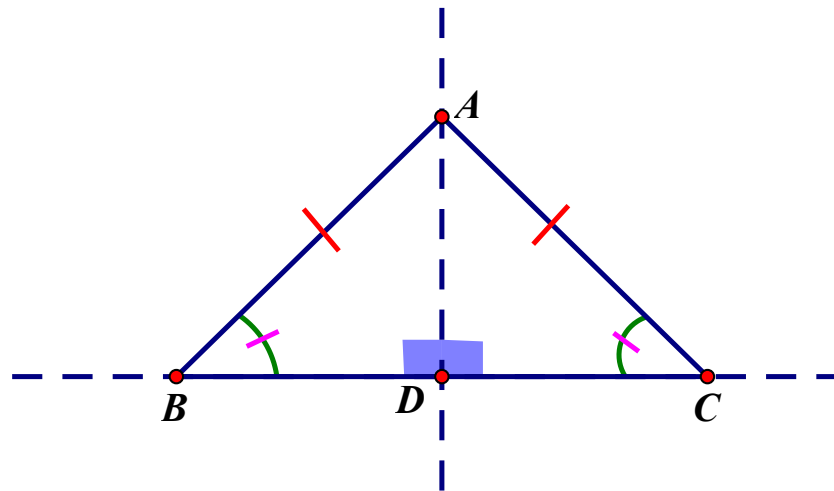
+

2

$$BD^2 + DC^2$$

$$AB^2 + AC^2 = 2AD^2 + 2BD^2 \quad (\text{เนื่องจาก } BD = DC)$$

$$AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$$



กำหนดให้ $\triangle ABC$ เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว มี AD ตั้งฉากกับ BC

$BD = DC$ (พิสูจน์ทำนองเดียวกันกับ กรณีที่ 1)

พิจารณา $\triangle ADB$ และ $\triangle ADC$ จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส จะได้ว่า

$$AB^2 = AD^2 + BD^2$$

1

$$AC^2 = AD^2 + DC^2$$

2

1

+

2

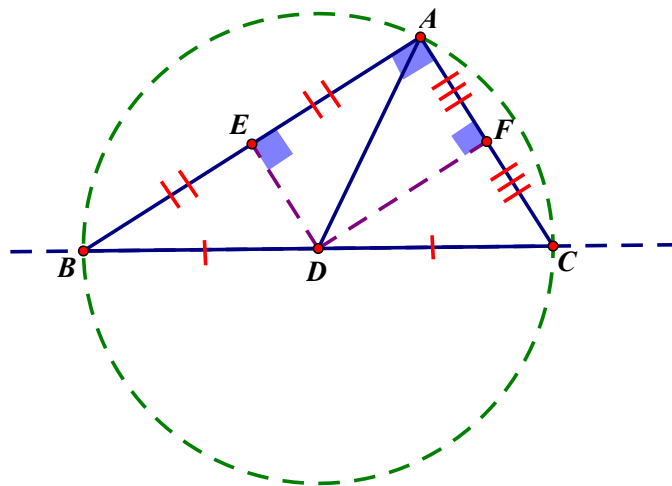
$$BD^2 + DC^2$$

$$AB^2 + AC^2 = 2AD^2 +$$

$$AB^2 + AC^2 = 2AD^2 + 2BD^2 \quad ; (BD = DC)$$

$$AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$$

กำหนดให้ $\triangle ABC$ เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก



จาก ทฤษฎีบทวงกลม มุมในครึ่งวงกลมมีขนาด 90° นั่นคือ $AD = BD = DC$ (รัศมีวงกลม)

กำหนดให้ DE เป็นเส้นตั้งฉากกับ AB และ DF เป็นเส้นตั้งฉากกับ AC

ในทำนองเดียวกัน

จากการพิสูจน์ในกรณีที่ 1 จะได้ว่า DF เป็นเส้นมัธยฐาน ของ $\triangle ADC$ จะได้ว่า $AF = FC$

จากการพิสูจน์ในกรณีที่ 2 จะได้ว่า ED เป็นเส้นมัธยฐาน ของ $\triangle ADB$ จะได้ว่า $AE = EB$

□ $AEDF$ เป็นสี่เหลี่ยมมุมฉาก จะได้ว่า $ED = AF$

พิจารณา $\triangle ABC$, $\triangle ADB$ และ $\triangle ADC$ จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส จะได้ว่า

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 \quad \text{—————} \quad \textcircled{1}$$

$$AD^2 = AE^2 + ED^2 \quad \text{—————} \quad \textcircled{2}$$

$$BD^2 = BE^2 + ED^2 \quad \text{—————} \quad \textcircled{3}$$

$$\textcircled{2} + \textcircled{3} \quad AD^2 + BD^2 = 2(AE^2 + ED^2) \quad \text{—————} \quad \textcircled{4}$$

$$2 \times \textcircled{4} \quad 2(AD^2 + BD^2) = 2[2(AE^2 +$$

$$= 4AE^2 + 4ED^2$$

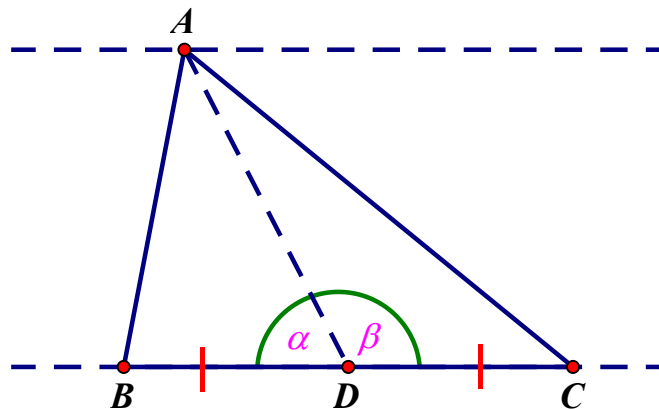
$$= (2AE)^2 + (2ED)^2$$

$$= (2AE)^2 + (2AF)^2$$

$$= (AB)^2 + (AC)^2$$

ดังนั้น $(AB)^2 + (AC)^2 = 2(AD^2 + BD^2)$

กรณีที่ 4 สามเหลี่ยมใดใด



กำหนดให้ $\triangle ABC$ เป็นสามเหลี่ยมใดใด

ให้ $\alpha + \beta = 180^\circ$

จะได้ว่า $\beta = 180^\circ - \alpha$

AD เป็นเส้นมัธยฐาน

จะได้ว่า $BD = DC$

จากกฎของ cosine จะได้ว่า

$$AB^2 = BD^2 + AD^2 - 2(BD)(AD) \cos \alpha$$

$$AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2(AD)(DC) \cos \beta$$

จาก $\textcircled{2}$ จะได้ว่า

1

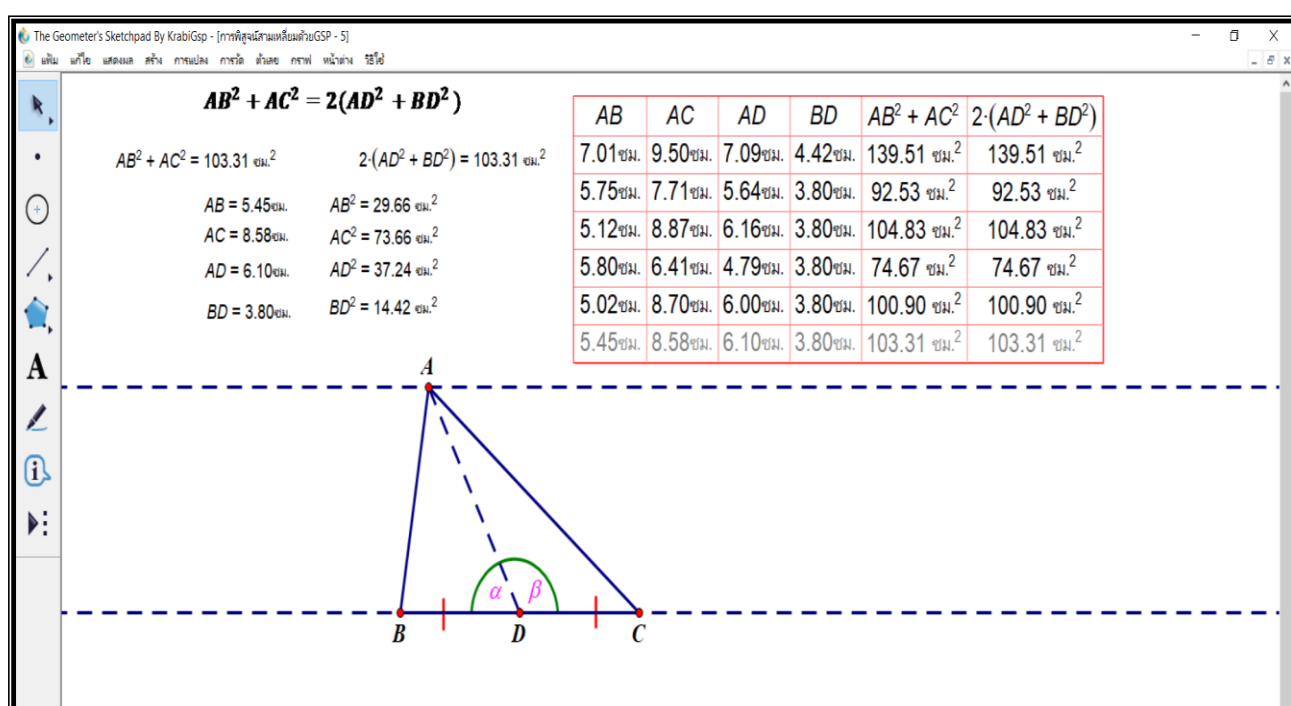
2

$$AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2(AD)(DC) \cos(180^\circ - \alpha) \quad 16$$

$$AC^2 = AD^2 + DC^2 + 2(AD)(DC) \cos(\alpha) \quad \text{_____} \quad 3$$

1 + 3 จะได้ว่า $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$

ขั้นตอนการสำรวจความยาวของเส้นมัธยฐานกับด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม ด้วยโปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP)



ภาพที่ 6 การสำรวจความยาวของเส้นมัธยฐานกับด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม ด้วยโปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP)

ขั้นตอนการหาสมการความยาวของเส้นมัธยฐานเมื่อทราบความยาวด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม

17

$$AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$$

$$AB^2 + AC^2 = 2AD^2 + 2BD^2$$

$$AD^2 = \frac{AB^2 + AC^2 - 2BD^2}{2}$$

$$AD^2 = \frac{AB^2 + AC^2 - 2\left(\frac{BC}{2}\right)^2}{2}$$

$$AD^2 = \frac{AB^2 + AC^2 - 2\left(\frac{BC^2}{4}\right)}{2}$$

$$AD^2 = \frac{AB^2 + AC^2 - \frac{BC^2}{2}}{2}$$

$$AD^2 = \frac{AB^2 + AC^2 - \frac{BC^2}{2}}{2}$$

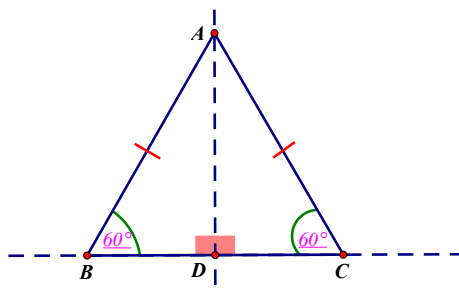
$$AD^2 = \frac{2AB^2 + 2AC^2 - BC^2}{4}$$

$$AD = \sqrt{\frac{2AB^2 + 2AC^2 - BC^2}{4}}$$

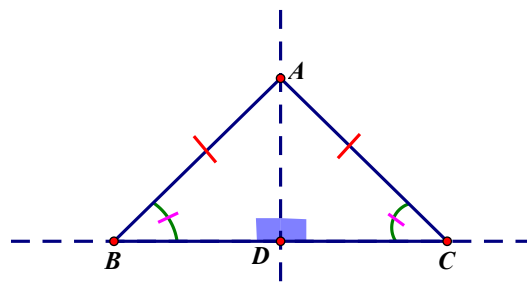
จากการที่คณะผู้จัดทำได้ดำเนินโครงการคณิตศาสตร์ ในครั้งนี้มีผลการดำเนินการดังนี้

ผลการดำเนินการ

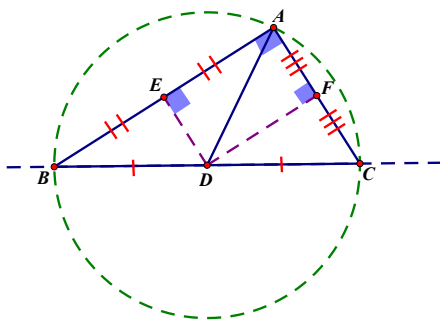
1. การพิสูจน์ความสัมพันธ์ของเส้นมัธยฐานกับความยาวด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม



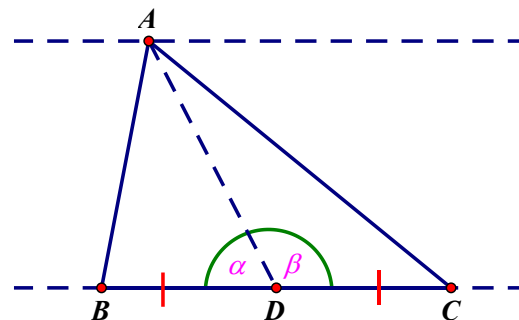
รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า



รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว



รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก



รูปสามเหลี่ยมใดใด

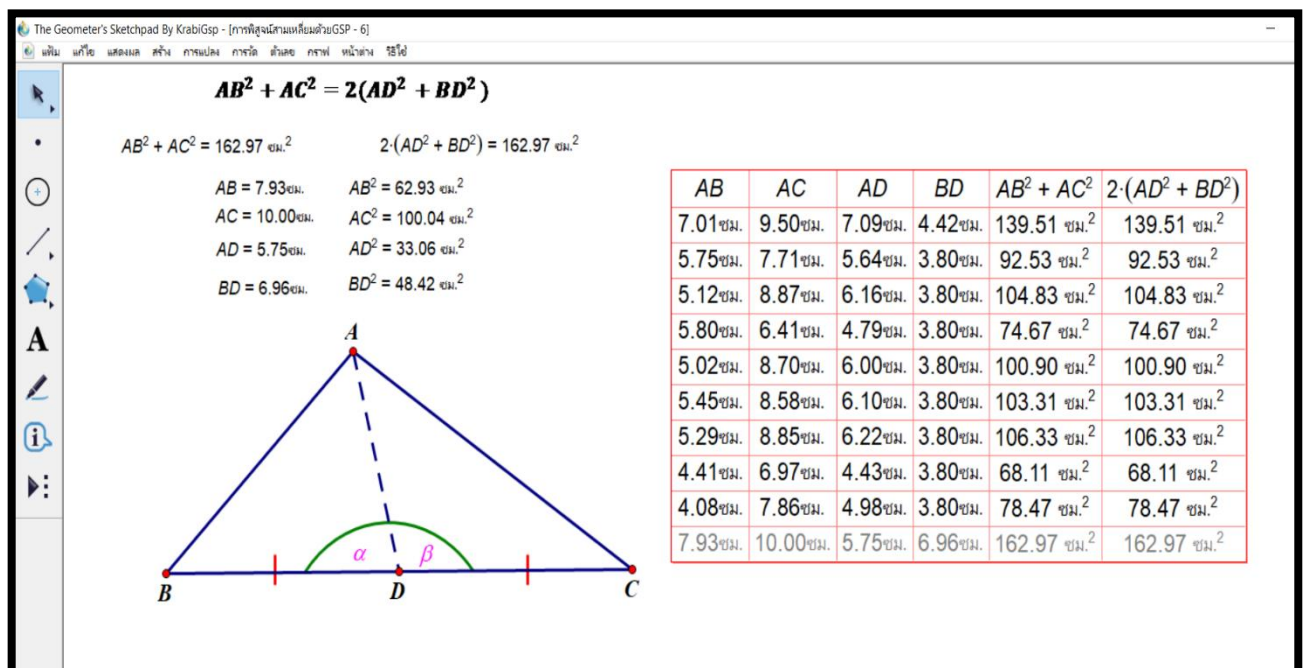
เมื่อ กำหนดให้ $\triangle ABC$ เป็นสามเหลี่ยมประเภทต่าง ๆ โดย AB และ AC เป็นด้านสองด้านที่เป็นด้านประชิดของรูปสามเหลี่ยม , AD เป็นเส้นมัธยฐาน , BD เป็นความยาวครึ่งหนึ่งของความยาวด้านที่สามจากการพิสูจน์ ได้สมการดังนี้

$$AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$$

สรุปได้ว่า

ผลรวมค่ากำลังสองของด้านสองด้านใด ๆ ของรูปสามเหลี่ยม เท่ากับ สองเท่าของผลบวกของความยาวของเส้นมัธยฐานยกกำลังสอง กับครึ่งหนึ่งของความยาวด้านที่สามยกกำลังสอง

2. การสำรวจความยาวของเส้นมัธยฐานกับด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม ด้วยโปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP)



จากการสำรวจความยาวของเส้นมัธยฐานกับด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม ด้วยโปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP) เมื่อเปลี่ยนความยาวด้านต่างๆ ของสามเหลี่ยมพบว่า ผลรวมค่ากำลังสองของด้านสองด้านใด ๆ ของรูปสามเหลี่ยม เท่ากับ สองเท่าของผลบวกของความยาวของเส้นมัธยฐานยกกำลังสอง กับครึ่งหนึ่งของความยาวด้านที่สามยกกำลังสอง เป็นจริงเสมอ

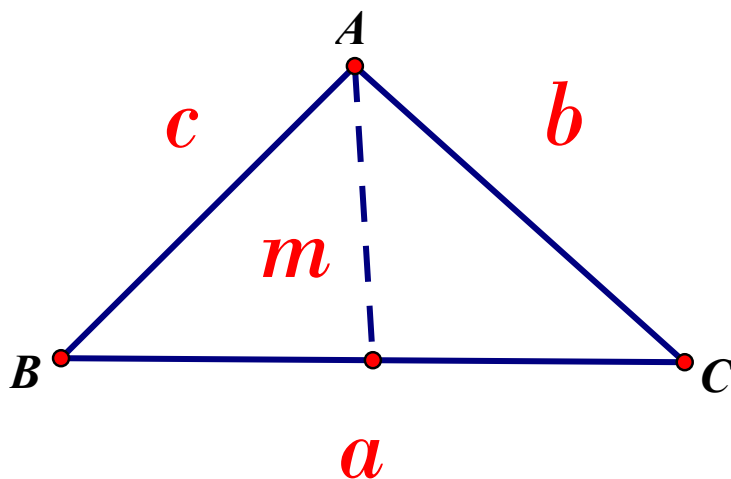
3. ขั้นตอนการหาสมการความยาวของเส้นมัธยฐานเมื่อทราบความยาวด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม

กำหนดให้ $\triangle ABC$ เป็นสามเหลี่ยมประเภทต่าง ๆ โดย AB และ AC เป็นด้านสองด้านที่เป็นด้านประชิดของรูปสามเหลี่ยม , AD เป็นเส้นมัธยฐาน , BD เป็นความยาวครึ่งหนึ่งของความยาวด้านที่สามจากการพิสูจน์ ได้สมการดังนี้

$$AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$$

จากสมการข้างต้น สามารถจัดสมการเพื่อหาความยาวเส้นมัธยฐานของรูปสามเหลี่ยมนี้ได้ว่า

$$AD = \sqrt{\frac{2AB^2 + 2AC^2 - BC^2}{4}}$$



เมื่อกำหนดให้ $\triangle ABC$ เป็นสามเหลี่ยมใดใด a, b, c เป็นความยาวด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม และ m เป็น ความยาวเส้นมัธยฐาน จะได้ว่า

$$m = \sqrt{\frac{2c^2 + 2b^2 - a^2}{4}}$$

จากการดำเนินการทำโครงการสามารถสรุปผลการดำเนินการ / อภิปรายผลการดำเนินการได้ดังนี้

สรุปผลการดำเนินการ

กำหนดให้ $\triangle ABC$ เป็นสามเหลี่ยมใดใด โดย AB และ AC เป็นด้านสองด้านที่เป็นด้านประชิดของรูปสามเหลี่ยม, AD เป็นเส้นมัธยฐาน, BD เป็นความยาวครึ่งหนึ่งของความยาวด้านที่สาม

จากการพิสูจน์ ได้สมการดังนี้

$$AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$$

จากสมการข้างต้น สามารถจัดสมการเพื่อหาความยาวเส้นมัธยฐานของรูปสามเหลี่ยมนี้ได้ว่า

$$AD = \sqrt{\frac{2AB^2 + 2AC^2 - BC^2}{4}}$$

เมื่อกำหนดให้ $\triangle ABC$ เป็นสามเหลี่ยมใดใด a, b, c เป็นความยาวด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม และ m เป็น ความยาวเส้นมัธยฐาน จะได้ว่า

$$m = \sqrt{\frac{2c^2 + 2b^2 - a^2}{4}}$$

อภิปรายผล

จากการใช้ โปรแกรมคณิตศาสตร์สำเร็จรูป The Geometer's Sketchpad (GSP) ความรู้พื้นฐานทางเรขาคณิต และความรู้เรื่องตรีโกณมิติ ในการพิสูจน์และสำรวจความยาวของเส้นมัธยฐานเมื่อทราบความยาวด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม พบว่า ผลรวมค่ากำลังสองของด้านสองด้านใด ๆ ของรูปสามเหลี่ยม เท่ากับสองเท่าของผลบวกของความยาวของเส้นมัธยฐานยกกำลังสอง กับครึ่งหนึ่งของความยาวด้านที่สามยกกำลังสอง นำไปสู่การหาสมการความยาวของเส้นมัธยฐานเมื่อทราบความยาวด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมได้ นั่นคือ ความยาวของเส้นมัธยฐาน เท่ากับ รากที่สองของสองเท่าของผลบวกกำลังสองของความยาวด้านสองด้านหักกำลังสองของด้านที่เหลือทั้งหมดหารด้วยสี่

1. นำสูตรการหาความยาวเส้นมีฐานไปประยุกต์ใช้ในการทำแบบฝึกหัด แบบทดสอบ
2. นำความรู้ที่ได้ไปประยุกต์ใช้ในการสร้างรูปทางเรขาคณิตที่หลากหลาย
3. ใช้ The Geometer's Sketchpad หรือ GSP สร้างรูปทางเรขาคณิตในรูปแบบต่าง ๆ ที่หลากหลายกว่านี้
4. ทำการพิสูจน์เพื่อให้ได้สูตรลัดนำไปใช้ได้อย่างหลากหลาย

กระทรวงศึกษาธิการ. (2560). **มาตรฐานการเรียนรู้และตัวชี้วัด กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์ และสาระภูมิศาสตร์ ในกลุ่มสาระการเรียนรู้สังคมศึกษา ศาสนา และวัฒนธรรม (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551.**

กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์ชุมนุมสหกรณ์การเกษตรแห่งประเทศไทย.

กรมวิชาการ กระทรวงศึกษาธิการ. (2551) **คู่มือจัดการเรียนรู้ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์.**

กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์องค์การรับส่งสินค้าและพัสดุภัณฑ์.

โครงการสารานุกรมไทยสำหรับเยาวชน โดยพระราชประสงค์ในพระบาทสมเด็จพระเจ้าอยู่หัว.(2551)

สารานุกรมไทยสำหรับเยาวชน เล่ม 6/ โครงการสารานุกรมไทยสำหรับเยาวชน โดยพระราชประสงค์ในพระบาทสมเด็จพระเจ้าอยู่หัว. กรุงเทพฯ: ด่านสุทธาการพิมพ์.

วิกิพีเดีย สารานุกรมเสรี.“**ตรีโกณมิติ**”.^{[ออนไลน์]. เข้าถึงได้จาก :}

https://th.wikipedia.org/wiki/%E0%B8%95%E0%B8%A3%E0%B8%B5%E0%B9%82%E0%B8%81%E0%B8%93%E0%B8%A1%E0%B8%B4%E0%B8%95%E0%B8%B4#cite_note-1 (วันที่สืบค้นข้อมูล 5 สิงหาคม 2569)

วิกิพีเดีย สารานุกรมเสรี.“**รูปสามเหลี่ยม**”.^{[ออนไลน์]. เข้าถึงได้จาก :}

<https://th.wikipedia.org/wiki/%E0%B8%A3%E0%B8%B9%E0%B8%9B%E0%B8%AA%E0%B8%B2%E0%B8%A1%E0%B9%80%E0%B8%AB%E0%B8%A5%E0%B8%B5%E0%B9%88%E0%B8%A2%E0%B8%A1> (วันที่สืบค้นข้อมูล 6 สิงหาคม 2569)

Marucakporkaerm. “**โปรแกรม GSP**”. ^{[ออนไลน์].เข้าถึงได้จาก :}

<https://sites.google.com/site/marucakporkaermgspkan/> (วันที่สืบค้นข้อมูล 6 สิงหาคม 2569)

TUTORFORYOU. “**ที่มาและความสำคัญ เรขาคณิตวิเคราะห์**”.^{[ออนไลน์]. เข้าถึงได้จาก :}

<https://sites.google.com/site/mathforu277/prawati-rekhakhnitwikheraah> (วันที่สืบค้นข้อมูล 6 สิงหาคม 2569)