

โครงการคณิตศาสตร์  
เรื่อง การประยุกต์ใช้ปริพันธ์จำกัดเขตหาพื้นที่ผิวทรงกลม

โดย

1. นางสาวโกมลตรา
2. นางสาวกาญจนา คำอ่อน
3. นางสาวเกวลิน สันสมุท

ครูที่ปรึกษา 1. นางสาวสุชาดา อินนุรักษ์  
2. นายจีฮาน ปากบารา

โรงเรียนทับปุดวิทยา สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษาพังงา ภูเก็ต ระนอง

รายงานฉบับนี้เป็นส่วนประกอบของโครงการคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย  
ประเภทสร้างทฤษฎีหรือคำอธิบายทางคณิตศาสตร์ เนื่องในงานสัปดาห์วิทยาศาสตร์ ส่วนภูมิภาค  
มหาวิทยาลัยราชภัฏสุราษฎร์ธานี ประจำปีการศึกษา 2569

|                   |                                                                                                           |
|-------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| ชื่อโครงการ       | การประยุกต์ใช้ปริพันธ์จำกัดเขตหาพื้นที่ผิวทรงกลม                                                          |
| ประเภท            | สร้างทฤษฎีหรือคำอธิบายทางคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย                                                |
| คณะผู้จัดทำ       | 1. นางสาวโกมลตรา<br>2. นางสาวกาญจนา คำอ่อน<br>3. นางสาวเกวลิน สันสมุทร                                    |
| ครูที่ปรึกษา      | 1. นางสาวสุชาดา อินนุรักษ์<br>2. นายจีฮาน ปากบารา                                                         |
| ชื่อโรงเรียน      | โรงเรียนทับปุดวิทยา                                                                                       |
| สถานที่ติดต่อ     | 63 หมู่ที่ 6 ตำบลบ่อแสน อำเภอบ้านด่าน จังหวัดพังงา 82180                                                  |
| โทรศัพท์          | 076-599012 โทรสาร 076-599011 Email <a href="mailto:thapputwittaya@tpw.ac.th">thapputwittaya@tpw.ac.th</a> |
| ระยะเวลาทำโครงการ | 30 มิถุนายน 2569 – 4 สิงหาคม 2569                                                                         |

---

### บทคัดย่อ

โครงการคณิตศาสตร์ ประเภทสร้างทฤษฎีหรือคำอธิบายทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ใช้ปริพันธ์จำกัดเขตหาพื้นที่ผิวทรงกลม มีจุดประสงค์ ดังนี้ 1) เพื่อศึกษาวิธีการใหม่ในการหาพื้นที่ผิวทรงกลมด้วยปริพันธ์จำกัดเขต 2) เพื่อใช้สูตรการหาพื้นที่ผิวของทรงกลมด้วยปริพันธ์จำกัดเขตกับโจทย์ปัญหาอื่น ๆ คณะผู้จัดทำได้นำโครงการที่ทำการศึกษาล้วมาต่อยอดในการแก้ปัญหาเกี่ยวกับพื้นที่ผิวของทรงกลม โดยสามารถคำนวณด้วยปริพันธ์เขตจำกัดได้ ซึ่งการจัดทำโครงการครั้งนี้ทำให้คณะผู้จัดทำมีแนวทางใหม่ในการอธิบายสิ่งที่เป็นนามธรรมให้เป็นรูปธรรมมากยิ่งขึ้น สามารถนำวิธีการดังกล่าวไปข้างต้นที่จะเผยแพร่แก่ผู้สนใจไว้ใช้ศึกษาและสร้างทางเลือกในการใช้สูตรเพื่อคำนวณต่อไป

## กิตติกรรมประกาศ

โครงการคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ใช้ปริพันธ์จำกัดเขตหาพื้นที่ผิวทรงกลมฉบับนี้ สำเร็จ ลุล่วงไปด้วยดีจากการสนับสนุนและให้กำลังใจในการทำโครงการจากฝ่ายบริหาร คณะครูกลุ่มสาระการ เรียนรู้คณิตศาสตร์ในโรงเรียนทับปุดวิทยา ผู้ปกครอง ตลอดจนเพื่อนนักเรียนทุกคน

ขอขอบพระคุณนาย ดร.พาหน ร่วมใจ ผู้อำนวยการโรงเรียนทับปุดวิทยา คุณครูณัฐชา คิตสำราญ รองผู้อำนวยการฝ่ายวิชาการ ที่ส่งเสริมสนับสนุนและให้กำลังใจในการทำ โครงการขอขอบพระคุณ คุณครูสุชาดา อินนุรักษ์ คุณครูจีฮาน ปากบารา ที่ปรึกษาโครงการ ที่กรุณา ให้คำปรึกษา แนะนำ ให้ข้อคิดเห็นและช่วยแก้ไขข้อบกพร่องต่างๆ ตลอดจนอนุเคราะห์ข้อมูลเพิ่มเติม จนทำให้โครงการสำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี ขอขอบพระคุณ คุณพ่อ คุณแม่ และผู้ปกครองที่เป็นกำลังใจและ อนุญาตให้มาทำโครงการในวันหยุด และหลังเลิกเรียน และขอขอบคุณสมาชิกในกลุ่มที่มีความตั้งใจ ร่วมมือกันในการจัดทำโครงการ รวมทั้งเพื่อนร่วมชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6/smp เพื่อนร่วมชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6/1 และนักเรียนโรงเรียนทับปุดวิทยาที่เป็นกำลังใจให้ความช่วยเหลืออยู่เสมอ

หวังว่าผลการศึกษาค้นคว้าและผลงานที่ได้คงทำให้ผู้ที่สนใจเห็นประโยชน์ในการศึกษาทฤษฎี ทางคณิตศาสตร์ เป็นผลงานที่มีคุณค่า และประโยชน์ทั้งหลายที่เกิดขึ้น ขอมอบแต่คุณพ่อ คุณแม่ ครูอาจารย์และโรงเรียนทับปุดวิทยาที่ประสิทธิ์ประสาทวิชาทุกท่าน

จึงขอขอบคุณมา ณ โอกาสนี้

คณะผู้จัดทำ  
สิงหาคม 2569

## สารบัญ

| เรื่อง                                 | หน้า |
|----------------------------------------|------|
| บทคัดย่อ                               | ก    |
| กิตติกรรมประกาศ                        | ข    |
| สารบัญ                                 | ค    |
| สารบัญตาราง                            | ง    |
| สารบัญรูปภาพ                           | จ    |
| บทที่ 1 บทนำ                           | 1    |
| บทที่ 2 เอกสารที่เกี่ยวข้อง            | 2    |
| บทที่ 3 วิธีการดำเนินการ               | 6    |
| บทที่ 4 ผลการดำเนินการ                 | 9    |
| บทที่ 5 สรุปผล อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ | 13   |
| บรรณานุกรม                             | 14   |
| ภาคผนวก                                | 15   |

## สารบัญตาราง

| เรื่อง                     | หน้า |
|----------------------------|------|
| ตารางที่ 3.1 แผนปฏิบัติงาน | 6    |
| ตารางที่ 3.2 สมาชิกในกลุ่ม | 7    |

## สารบัญรูปภาพ

| เรื่อง                                                                 | หน้า |
|------------------------------------------------------------------------|------|
| รูปภาพที่ 2.1 แสดงส่วนประกอบต่าง ๆ ของทรงกลม                           | 2    |
| รูปภาพที่ 2.2 แสดงการแบ่งพื้นผิวของทรงกลมออกเป็นรูปหลายเหลี่ยมจำนวนมาก | 3    |

## บทที่ 1

### บทนำ

#### 1.1 ที่มาและความสำคัญของโครงการ

จากการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ รายวิชาเพิ่มเติม ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ภาคเรียนที่ 1 บทที่ 2 แคลคูลัสเบื้องต้น เรื่อง ปริพันธ์จำกัดเขต และพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง ทำให้คณะผู้จัดทำมีความสนใจที่จะศึกษาการหาพื้นที่ผิวของทรงกลมด้วยปริพันธ์จำกัดเขต เนื่องจากคณะผู้จัดทำเคยศึกษาเรื่องพื้นที่ผิวของทรงกลมในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 และจากการค้นคว้าเพิ่มเติมในหนังสือเรียน หนังสืออ่านเพิ่มเติม และในอินเทอร์เน็ต พบว่า การหาพื้นที่ผิวของทรงกลม สามารถหาได้หลายวิธี ดังนั้นคณะผู้จัดทำจึงสนใจที่จะศึกษา เรื่อง การประยุกต์ใช้ปริพันธ์จำกัดเขตหาพื้นที่ผิวทรงกลม และใช้ความรู้ เรื่อง ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน ปริพันธ์จำกัดเขต และพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง มาอธิบายและพิสูจน์ให้เห็นว่าปริพันธ์จำกัดเขต และสามารถใช้หาพื้นที่ผิวของทรงกลมได้

#### 1.2 วัตถุประสงค์

1. เพื่อศึกษาวิธีการใหม่ในการหาพื้นที่ผิวทรงกลมด้วยปริพันธ์จำกัดเขต
2. เพื่อใช้สูตรการหาพื้นที่ผิวของทรงกลมด้วยปริพันธ์จำกัดเขตกับโจทย์ปัญหาอื่น ๆ

#### 1.3 สมมติฐาน

สามารถศึกษาวิธีการใหม่ในการหาพื้นที่ผิวทรงกลมจากปริพันธ์จำกัดเขตได้

#### 1.4 ขอบเขตการศึกษา

ศึกษาการหาพื้นที่ผิวทรงกลมด้วยปริพันธ์จำกัดเขต

#### 1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. ได้ค้นคว้าและศึกษา เรื่อง อัตราการเปลี่ยนแปลง อนุพันธ์ของฟังก์ชัน และปริพันธ์จำกัดเขตเพิ่มเติม เพื่อนำมาอธิบายสูตรพื้นที่ผิวของทรงกลมด้วยปริพันธ์จำกัดเขต
2. สามารถอธิบายการใช้ปริพันธ์จำกัดเขตในการหาพื้นที่ผิวทรงกลมได้
3. สามารถนำความรู้ เรื่อง การประยุกต์ใช้ปริพันธ์จำกัดเขตหาพื้นที่ผิวทรงกลม เพื่อใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับพื้นที่ผิวของทรงกลม และรูปเรขาคณิตสามมิติอื่น ๆ ได้อย่างยิ่งขึ้น

## บทที่ 2

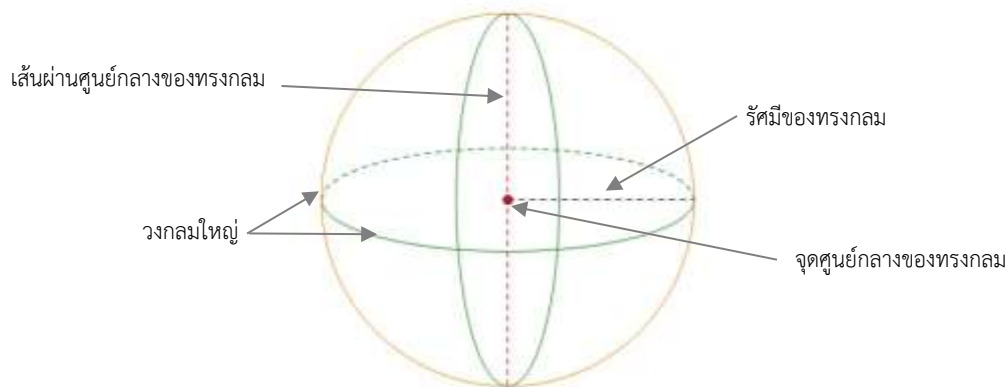
### เอกสารที่เกี่ยวข้อง

โครงการคณิตศาสตร์ เรื่อง การศึกษาที่มาของสูตรปริมาตรทรงกลมด้วยปริพันธ์จำกัดเขต คณะผู้จัดทำได้ศึกษาเอกสารที่เกี่ยวข้อง ดังนี้

1. ทรงกลม
2. ฟังก์ชัน และฟังก์ชันวงกลม
3. อัตราการเปลี่ยนแปลง
4. อนุพันธ์ของฟังก์ชัน
5. ปริพันธ์จำกัดเขต

#### 2.1 ทรงกลม

**ทรงกลม** คือ รูปเรขาคณิตสามมิติที่มีผิวโค้งเรียบ และจุดทุกจุดบนผิวโค้งอยู่ห่างจากจุดคงที่จุดหนึ่งเป็นระยะเท่ากัน เรียกว่า ทรงกลม (sphere)



รูปภาพที่ 2.1 แสดงส่วนประกอบต่าง ๆ ของทรงกลม

## พื้นที่ผิวทรงกลม

กำหนดให้ พื้นที่ผิวของทรงกลมเป็น  $S$  ตารางหน่วย



รูปภาพที่ 2.2 แสดงการแบ่งพื้นที่ผิวของทรงกลมออกเป็นรูปหลายเหลี่ยมจำนวนมาก

แบ่งพื้นที่ผิวของทรงกลมที่กำหนดให้ออกเป็นรูปหลายเหลี่ยมจำนวนมาก ๆ เช่น 10,000 รูป และให้แต่ละรูปมีพื้นที่เป็น  $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_{10,000}$  ตารางหน่วย

จะได้  $S \approx a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{10,000}$  ตารางหน่วย

จากการแบ่งพื้นที่ผิวของทรงกลมเป็นรูปหลายเหลี่ยมจำนวนมาก ๆ จึงทำให้เหมือนเป็นการแบ่งทรงกลมเป็นพีระมิดที่มียอดของพีระมิดอยู่ที่จุดศูนย์กลางของทรงกลมและแต่ละพีระมิดมีส่วนสูงยาวเท่ากับรัศมีของทรงกลม ซึ่ง คือ  $r$

เนื่องจากปริมาตรโดยประมาณของทรงกลมจะหาได้จากผลรวมของปริมาตรของพีระมิดทั้งหมด

$$\text{และปริมาตรของพีระมิด} = \frac{1}{3} \times \text{พื้นที่ฐาน} \times \text{ความสูง}$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ ปริมาตรโดยประมาณของทรงกลม} &= \frac{1}{3}a_1r + \frac{1}{3}a_2r + \frac{1}{3}a_3r + \dots + \frac{1}{3}a_{10,000}r \\ &= \frac{1}{3}r(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{10,000}) \\ &= \frac{1}{3}rs \end{aligned}$$

ด้วยแนวคิดนี้ เมื่อเราแบ่งพื้นที่ผิวของทรงกลมออกเป็นรูปหลายเหลี่ยมจำนวนมากพอ เราจะได้ว่า ปริมาตร

$$\text{ของทรงกลมที่มีรัศมี } r \text{ เท่ากับ } \frac{1}{3}rs$$

เนื่องจาก ปริมาตรของทรงกลม  $= \frac{4}{3}\pi r^3$

จะได้  $\frac{1}{3}\pi r s = \frac{4}{3}\pi r^3$

ดังนั้น  $s = 4\pi r^2$

นั่นคือ พื้นที่ผิวของทรงกลมเท่ากับ  $4\pi r^2$  ตารางหน่วย

## 2.2 ฟังก์ชัน และฟังก์ชันวงกลม

### ฟังก์ชัน

ความสัมพันธ์ที่ สมาชิกแต่ละตัวในโดเมนมีความสัมพันธ์กับสมาชิกในเรนจ์เพียงตัวเดียว เป็นความสัมพันธ์ที่มีความสำคัญและใช้มากในคณิตศาสตร์ เรียกความสัมพันธ์นั้นว่า **ฟังก์ชัน**

**บทนิยาม** ฟังก์ชัน คือ ความสัมพันธ์ซึ่งคู่อันดับสองคู่ใด ๆ ของความสัมพันธ์นั้น ถ้ามีสมาชิกตัวหน้าเหมือนกันแล้ว สมาชิกตัวหลังต้องเหมือนกัน

### รูปมาตรฐานของสมการวงกลม (ฟังก์ชันวงกลม)

สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่  $(h, k)$  และรัศมียาว  $r$  หน่วย คือ

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

สมการนี้เรียกว่า รูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลม

## 2.3 อัตราการเปลี่ยนแปลง

**บทนิยาม** ถ้า  $y = f(x)$  เป็นฟังก์ชันใดๆ เมื่อค่าของ  $x$  เปลี่ยนเป็น  $x + h$  โดยที่  $h \neq 0$  และค่าของ  $y$  เปลี่ยนจาก  $f(x)$  เป็น  $f(x+h)$  แล้ว

1. อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ  $y$  เทียบกับ  $x$  ในช่วง  $x$  ถึง  $x+h$  คือ  $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$
2. อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ  $y$  เทียบกับ  $x$  ในช่วง  $x_1$  ถึง  $x_2$  คือ  $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$
3. อัตราการเปลี่ยนแปลงของ  $y$  เทียบกับ  $x$  ขณะ  $x$  ใดๆ คือ  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

ถ้า  $y = f(x)$  เป็นฟังก์ชันใดๆ เมื่อค่าของ  $x_1$  เปลี่ยนเป็น  $x_2$  โดยที่  $x_2 - x_1 \neq 0$

และค่าของ  $y$  เปลี่ยนจาก

แล้ว อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ  $y$  เทียบกับ  $x$  ในช่วง  $x_1$  ถึง  $x_2$  คือ  $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

เรียก  $f(x_2) - f(x_1)$  ว่าส่วนเปลี่ยนแปลงของ  $y$  เขียนแทนด้วย  $\Delta y$

และ เรียก  $x_2 - x_1$  ว่าส่วนเปลี่ยนแปลงของ  $x$  เขียนแทนด้วย  $\Delta x$

ดังนั้น อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ  $y$  เทียบกับ  $x$  อาจเขียนได้อีกแบบคือ

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

## 2.4 อนุพันธ์ของฟังก์ชัน

**บทนิยาม** ถ้า  $y = f(x)$  เป็นฟังก์ชันใด ๆ ที่  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$  หาค่าได้

ค่าที่ได้เรียกว่าอนุพันธ์ของฟังก์ชัน  $f$  ที่  $x$  ใด ๆ เขียนแทนด้วย  $y'$  หรือ  $f'(x)$  หรือ  $\frac{d}{dx}(y)$  หรือ  $\frac{d}{dx}(f(x))$

$$\text{ดังนั้น } y' \text{ หรือ } f'(x) \text{ หรือ } \frac{d}{dx}(y) \text{ หรือ } \frac{d}{dx}(f(x)) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

## 2.5 ปริพันธ์จำกัดเขต

**บทนิยาม** ให้  $f$  เป็นฟังก์ชัน ถ้า  $F$  เป็นฟังก์ชันซึ่ง  $F'(x) = f(x)$  สำหรับทุก  $x$  ที่อยู่ในโดเมนของ  $f$  แล้วจะเรียกฟังก์ชัน  $F$  ว่าเป็น ปริยานุพันธ์ (antiderivative) หนึ่งของฟังก์ชัน  $f$

กำหนด  $f$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง  $[a, b]$  ถ้า  $F$  เป็นปริยานุพันธ์ของฟังก์ชัน  $f$  แล้ว

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

### บทที่ 3

#### วิธีการดำเนินการ

ในการทำโครงการคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์ใช้ปริพันธ์จำกัดเขตหาพื้นที่ผิวทรงกลม มีวิธีการทำโครงการคณิตศาสตร์ตามขั้นตอนดังนี้

#### 1. ขั้นตอนการวางแผน

- 1.1 ร่วมกันวางแผนหาหัวข้อโครงการที่สนใจและเขียนเค้าโครงโครงการ
- 1.2 นำเค้าโครงที่เขียนได้นำเสนอกับคุณครูที่ปรึกษา
- 1.3 นำข้อเสนอแนะที่ได้จากคุณครูที่ปรึกษามาปรับปรุงแก้ไข

#### 2. กำหนดแผนปฏิบัติงาน

ในการทำโครงการ เรื่องการประยุกต์ใช้ปริพันธ์จำกัดเขตหาพื้นที่ผิวทรงกลมได้กำหนดแผนปฏิบัติงาน ดังตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 3.1 แผนปฏิบัติงาน

| ที่ | รายการปฏิบัติ                                                      | กำหนดเวลา             | ผลการปฏิบัติ                                                                           |
|-----|--------------------------------------------------------------------|-----------------------|----------------------------------------------------------------------------------------|
| 1.  | เลือก / กำหนดหัวข้อโครงการ                                         | 30 มิถุนายน 2569      | ได้หัวข้อในการทำโครงการ                                                                |
| 2.  | ศึกษาเอกสารที่เกี่ยวข้อง และสืบค้นข้อมูลจากหนังสือ และอินเทอร์เน็ต | 1-7<br>กรกฎาคม 2569   | ได้ความรู้และข้อมูลในการศึกษาที่มาของสูตรพื้นผิวทรงกลมด้วยปริพันธ์จำกัดเขต             |
| 3.  | รวบรวมข้อมูลจากแหล่งข้อมูลทั้งหมดที่หามาได้                        | 8-15<br>กรกฎาคม 2569  | ได้ข้อมูลที่ต้องการจะศึกษา เรื่องการศึกษาที่มาของสูตรพื้นผิวทรงกลมด้วยปริพันธ์จำกัดเขต |
| 4.  | อธิบายสูตรพื้นผิวของทรงกลม ที่ได้มาจากการใช้ปริพันธ์จำกัดเขต       | 16-25<br>กรกฎาคม 2569 | เข้าใจและสามารถอธิบายสูตรปริมาตรของทรงกลมด้วยปริพันธ์จำกัดเขต                          |

| ที่ | รายการปฏิบัติ                                               | กำหนดเวลา             | ผลการปฏิบัติ                                    |
|-----|-------------------------------------------------------------|-----------------------|-------------------------------------------------|
| 5.  | ปรีษาครูที่ปรีษาในการจัดทำ<br>รูปเล่ม                       | 26-29<br>กรกฎาคม 2569 | ได้ความรู้และแนวทางในการ<br>จัดทำรูปเล่มโครงการ |
| 6.  | รวบรวมข้อมูลและจัดทำรูปเล่ม<br>โครงการ และปรับปรุงเพิ่มเติม | 30-6<br>สิงหาคม 2569  | ได้รูปเล่มโครงการที่สมบูรณ์                     |
| 7.  | จัดทำ PowerPoint นำเสนอ                                     | 7-10<br>สิงหาคม 2569  | ทำ PowerPoint นำเสนอ<br>โครงการที่สมบูรณ์       |
| 8.  | ฝึกซ้อมการนำเสนอโครงการ                                     | 11-17<br>สิงหาคม 2569 | มีความพร้อมในการนำเสนอ<br>โครงการ               |

### 3. กำหนดกระบวนการทำงานกลุ่ม

#### ตารางที่ 3.2 สมาชิกในกลุ่ม

| ชื่อสมาชิก            | หน้าที่ในการรับผิดชอบ                                                                                                                                                       |
|-----------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| นางสาวโกลตรา          | นำเสนอปัญหาที่ตนเองสนใจ เก็บรวบรวมข้อมูล ศึกษาข้อมูล<br>และเอกสารที่เกี่ยวข้อง อธิบายที่มาของสูตรปริมาตรทรงกลมด้วย<br>ปริพันธ์จำกัดเขต และสร้างรูปเรขาคณิตโดยใช้โปรแกรม GSP |
| นางสาวกาญจนา คำอ่อน   | นำเสนอปัญหาที่ตนเองสนใจ เก็บรวบรวมข้อมูล ศึกษาข้อมูล<br>และเอกสารที่เกี่ยวข้อง อธิบายที่มาของสูตรปริมาตรทรงกลมด้วย<br>ปริพันธ์จำกัดเขต จัดทำรูปเล่ม จัดทำ PowerPoint        |
| นางสาวเกวลิน สันสมุทร | นำเสนอปัญหาที่ตนเองสนใจ เก็บรวบรวมข้อมูล ศึกษาข้อมูล<br>และเอกสารที่เกี่ยวข้อง อธิบายที่มาของสูตรปริมาตรทรงกลมด้วย<br>ปริพันธ์จำกัดเขต จัดทำรูปเล่ม จัดทำ PowerPoint        |

#### 4. ขั้นตอนการศึกษาปริมาตรทรงกลมด้วยปริพันธ์จำกัดเขต

- 4.1 หาข้อมูลและเก็บรวบรวมข้อมูลจากเอกสารที่เกี่ยวข้อง
- 4.2 ศึกษาอัตราการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันใด ๆ
- 4.3 ศึกษาปริพันธ์จำกัดเขต
- 4.4 อธิบายการหาปริมาตรทรงกลมและพื้นที่ผิวด้วยปริพันธ์จำกัดเขต
- 4.5 ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่าง การหาพื้นที่ผิวทรงกลมด้วยสูตร  $4\pi r^2$  ด้วยปริพันธ์จำกัดเขต
- 4.6 คำนวณพื้นที่ผิวด้วยปริพันธ์จำกัดเขตและตรวจคำตอบด้วยโปรแกรม GSP

#### 5. ขั้นตอนการวิเคราะห์และสรุปผล

การประยุกต์ใช้ปริพันธ์จำกัดเขตหาพื้นที่ผิวทรงกลม พบว่า การหาพื้นที่ผิวทรงกลมสามารถหาด้วยปริพันธ์จำกัดเขตได้

#### 6. ขั้นตอนการใช้งานและนำเสนอ

ประยุกต์การหาพื้นที่ผิวทรงกลมด้วยการใช้ปริพันธ์จำกัดเขตมาคำนวณหาพื้นที่ผิวของทรงกลม

## บทที่ 4

### ผลการดำเนินการ

จากการศึกษาที่มาของสูตรพื้นที่ผิวทรงกลมด้วยปริพันธ์จำกัดเขต ทำให้สามารถหาพื้นที่ผิวได้ดังนี้

1. จากสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่  $(h, k)$  เมื่อ  $h = 0$  และ  $k = 0$  และรัศมียาว  $r$  หน่วย คือ

$$(x - k)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

จะได้สมการ  $x^2 + y^2 = r^2$  เป็นสมการวงกลมรัศมี  $r$  หน่วย

จะได้  $f(x) = y = \sqrt{r^2 - x^2}$  จัดรูปให้เป็นฟังก์ชันเพื่อนำ  $y$  ไปแทนในรัศมีของ

ทรงกลม

2. จากพื้นที่ผิวทรงกลม คือ  $4\pi r^2$

$$\begin{aligned} \text{เมื่อพิจารณาครึ่งวงกลม พื้นที่ผิวครึ่งวงกลม } A &= \frac{4\pi r^2}{2} \\ &= 2\pi r^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{แทนค่า } y \text{ ในรัศมี } A &= 2\pi \left( \sqrt{r^2 - x^2} \right)^2 ; 0 \leq x \leq r \\ &= 2\pi (r^2 - x^2) ; 0 \leq x \leq r \\ &= 2\pi r^2 - 2\pi x^2 ; 0 \leq x \leq r \end{aligned}$$

หาอัตราการเปลี่ยนแปลงของพื้นที่ครึ่งทรงกลม

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dx} &= \frac{d(2\pi r^2 - 2\pi x^2)}{dx} \\ \frac{dA}{dx} &= 0 - 2\pi(2x) \end{aligned}$$

$$\frac{dA}{dx} = -4\pi x$$

$$dA = -4\pi x dx$$

ทำการรวมพื้นที่ผิว  $dA$  จะได้

$$\int_{y_1}^{y_2} dA = \int_{y_1}^{y_2} -4\pi x dx$$

$$= -2\pi x^2 \Big|_{y_1=\sqrt{r^2-x_1^2}}^{y_2=\sqrt{r^2-x_2^2}}$$

พิจารณา  $y_1 = \sqrt{r^2 - x_1^2}$  จะได้  $x_1^2 = r^2 - y_1^2$

และ  $y_2 = \sqrt{r^2 - x_2^2}$  จะได้  $x_2^2 = r^2 - y_2^2$

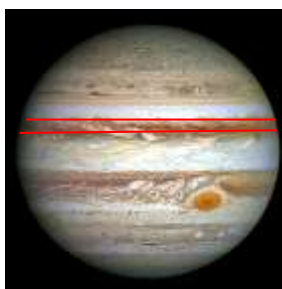
$$\text{ทำให้ } \int dA = -2\pi x^2 \Big|_{x_1^2=r^2-y_1^2}^{x_2^2=r^2-y_2^2}$$

$$= \left[ -2\pi(r^2 - y_2^2) \right] - \left[ -2\pi(r^2 - y_1^2) \right]$$

$$= -2\pi r^2 + 2\pi y_2^2 + 2\pi r^2 - 2\pi y_1^2$$

$$= 2\pi y_2^2 - 2\pi y_1^2$$

**ตัวอย่างที่ 1** ดาวพฤหัสบดี มีเส้นผ่านศูนย์กลาง 139,820 กิโลเมตร จงหาแถบสีน้ำตาลเข้ม โดยแถบกลางอยู่ห่างจากเส้นศูนย์สูตร 1,000 กิโลเมตร และแถบบนอยู่ห่างจากเส้นศูนย์สูตร 1,800 กิโลเมตร จงหาพื้นที่แถบสีน้ำตาลเข้ม



วิธีทำ เมื่อเทียบกับแกน  $x$  และแกน  $Y$  จะได้ว่า

แถบสีน้ำตาลเข้มด้านล่าง ( $y_1$ ) มีค่าเป็น 1,000 กิโลเมตร

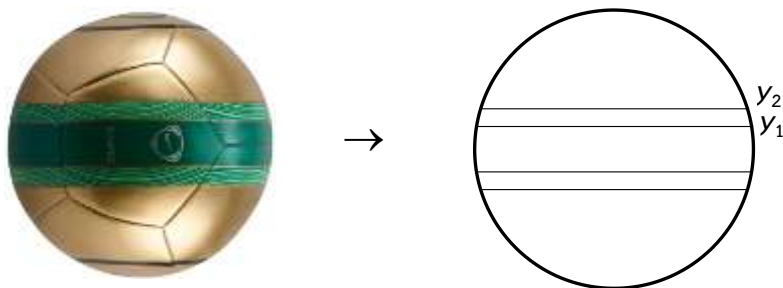
และแถบสีน้ำตาลเข้มด้านบน ( $y_2$ ) มีค่าเป็น 1,800 กิโลเมตร

จากการศึกษาพบว่า ลักษณะพื้นที่ผิวทรงกลมที่เป็นแถบสีมีค่าเท่ากับ

$$\begin{aligned} A &= 2\pi y_2^2 - 2\pi y_1^2 \\ &= 2\pi(1,800)^2 - 2\pi(1,000)^2 \\ &= 6,480,000\pi - 2,000,000\pi \\ &= 4,480,000\pi \end{aligned}$$

จะได้ว่า พื้นที่แถบสีน้ำตาลเข้ม เท่ากับ 4,480,000 ตารางเซนติเมตร

**ตัวอย่างที่ 2** ลูกฟุตบอลลูกหนึ่งมีรัศมี 11 เซนติเมตร มีแถบสีเขียวเข้มหนา 5 เซนติเมตร และแถบสีเขียวอ่อนหนา 2 เซนติเมตร จงหาพื้นที่สีเขียวอ่อน



วิธีทำ เมื่อเทียบกับแกน  $X$  และแกน  $Y$

พิจารณาซีกบน จะได้ว่า

แถบสีเขียวอ่อนด้านล่าง ( $y_1$ ) มีค่าเป็น 2.5 เซนติเมตร

และแถบสีเขียวอ่อนด้านบน ( $y_2$ ) มีค่าเป็น  $2.5 + 2 = 4.5$  เซนติเมตร

จากการศึกษา พบว่า พื้นที่ผิวทรงกลมที่เป็นแถบสีมีค่าเท่ากับ

$$\begin{aligned}
 A &= 2\pi y_2^2 - 2\pi y_1^2 \\
 &= 2\pi(4.5)^2 - 2\pi(2.5)^2 \\
 &= 40.5\pi - 12.5\pi \\
 &= 28\pi \\
 &56\pi \\
 &\rightarrow \\
 &= 2\pi(4.5)^2 - 2\pi(2.5)^2 \\
 &= 40.5\pi - 12.5\pi \\
 &= 28\pi
 \end{aligned}$$

จะได้ว่า จากแถบสี่เหลี่ยมอ่อนมีทั้งด้านบนและด้านล่าง จึงมีพื้นที่เท่ากับ  $56\pi$  ตารางเซนติเมตร

## บทที่ 5

### สรุป อภิปรายผลและข้อเสนอแนะ

การศึกษาโครงการคณิตศาสตร์ มีวัตถุประสงค์เพื่อ

1. เพื่อศึกษาวิธีการใหม่ในการหาพื้นที่ผิวทรงกลมจากปริพันธ์จำกัดเขต
2. เพื่อใช้สูตรการหาพื้นที่ผิวของทรงกลมด้วยปริพันธ์จำกัดเขตกับโจทย์ปัญหาอื่น

#### 5.1 สรุปผลและอภิปราย

1. สามารถหาพื้นที่ผิวของทรงกลมจากปริพันธ์จำกัดเขตได้
2. สามารถใช้สูตรการหาพื้นที่ผิวของทรงกลมด้วยปริพันธ์จำกัดเขตกับโจทย์ปัญหาอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้องกับทรงกลม และรูปเรขาคณิตสามมิติได้

#### 5.3 ข้อเสนอแนะ

สามารถนำความรู้ที่ได้จากการทำโครงการครั้งนี้ไปต่อยอดในการหาพื้นที่ผิวทรงกรวยและพื้นที่ผิวของทรงกระบอกต่อไป

### บรรณานุกรม

คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา. (2020, มิถุนายน 2). แคลคูลัส 2 EP. 2 การหาพื้นที่ผิวที่เกิดจากการหมุน [5/22]

<https://www.youtube.com/watch?v=PwZ24q9gogc>

R.Supakit. (2020, มิถุนายน 2). พื้นที่ผิวทรงกลม - อินทิเกรตสองชั้น

<https://www.youtube.com/watch?v=FlipLcIKMCY>

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ. (2562). หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ม.6 (เล่มที่ 1). ลาดพร้าว 2249 ถนนลาดพร้าว วังทองหลาง, กรุงเทพมหานคร: สกสศ.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ. (2563). หนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ ม.3 (เล่มที่ 2). ลาดพร้าว 2249 ถนนลาดพร้าว วังทองหลาง, กรุงเทพมหานคร: สกสศ.

ภาคผนวก

## ภาพประกอบการทำงาน



1. Kreisbogenlänge  
 $y^2 + x^2 = r^2$   
 Ableiten:  
 $2y \cdot y' + 2x = 0$   
 $y' = -x/y$   
 impl. Q.2.1.6:  $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$   $\int dx$

2. Kreisbogenlänge  
 $A = \pi r^2$   
 Ableiten:  
 $\frac{dA}{dr} = 2\pi r$   
 impl. Q.2.1.6:  $\frac{dA}{dr} = 2\pi r$

3. Kreisbogenlänge  
 $A = \pi r^2$   
 Ableiten:  
 $\frac{dA}{dr} = 2\pi r$   
 impl. Q.2.1.6:  $\frac{dA}{dr} = 2\pi r$

4. Kreisbogenlänge  
 $A = \pi r^2$   
 Ableiten:  
 $\frac{dA}{dr} = 2\pi r$   
 impl. Q.2.1.6:  $\frac{dA}{dr} = 2\pi r$

5. Kreisbogenlänge  
 $A = \pi r^2$   
 Ableiten:  
 $\frac{dA}{dr} = 2\pi r$   
 impl. Q.2.1.6:  $\frac{dA}{dr} = 2\pi r$

6. Kreisbogenlänge  
 $A = \pi r^2$   
 Ableiten:  
 $\frac{dA}{dr} = 2\pi r$   
 impl. Q.2.1.6:  $\frac{dA}{dr} = 2\pi r$

7. Kreisbogenlänge  
 $A = \pi r^2$   
 Ableiten:  
 $\frac{dA}{dr} = 2\pi r$   
 impl. Q.2.1.6:  $\frac{dA}{dr} = 2\pi r$

8. Kreisbogenlänge  
 $A = \pi r^2$   
 Ableiten:  
 $\frac{dA}{dr} = 2\pi r$   
 impl. Q.2.1.6:  $\frac{dA}{dr} = 2\pi r$

9. Kreisbogenlänge  
 $A = \pi r^2$   
 Ableiten:  
 $\frac{dA}{dr} = 2\pi r$   
 impl. Q.2.1.6:  $\frac{dA}{dr} = 2\pi r$

10. Kreisbogenlänge  
 $A = \pi r^2$   
 Ableiten:  
 $\frac{dA}{dr} = 2\pi r$   
 impl. Q.2.1.6:  $\frac{dA}{dr} = 2\pi r$

1. Kreisbogenlänge  
 $y^2 + x^2 = r^2$   
 Ableiten:  
 $2y \cdot y' + 2x = 0$   
 $y' = -x/y$   
 impl. Q.2.1.6:  $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$   $\int dx$

2. Kreisbogenlänge  
 $A = \pi r^2$   
 Ableiten:  
 $\frac{dA}{dr} = 2\pi r$   
 impl. Q.2.1.6:  $\frac{dA}{dr} = 2\pi r$

3. Kreisbogenlänge  
 $A = \pi r^2$   
 Ableiten:  
 $\frac{dA}{dr} = 2\pi r$   
 impl. Q.2.1.6:  $\frac{dA}{dr} = 2\pi r$

4. Kreisbogenlänge  
 $A = \pi r^2$   
 Ableiten:  
 $\frac{dA}{dr} = 2\pi r$   
 impl. Q.2.1.6:  $\frac{dA}{dr} = 2\pi r$

5. Kreisbogenlänge  
 $A = \pi r^2$   
 Ableiten:  
 $\frac{dA}{dr} = 2\pi r$   
 impl. Q.2.1.6:  $\frac{dA}{dr} = 2\pi r$

6. Kreisbogenlänge  
 $A = \pi r^2$   
 Ableiten:  
 $\frac{dA}{dr} = 2\pi r$   
 impl. Q.2.1.6:  $\frac{dA}{dr} = 2\pi r$

7. Kreisbogenlänge  
 $A = \pi r^2$   
 Ableiten:  
 $\frac{dA}{dr} = 2\pi r$   
 impl. Q.2.1.6:  $\frac{dA}{dr} = 2\pi r$

8. Kreisbogenlänge  
 $A = \pi r^2$   
 Ableiten:  
 $\frac{dA}{dr} = 2\pi r$   
 impl. Q.2.1.6:  $\frac{dA}{dr} = 2\pi r$

9. Kreisbogenlänge  
 $A = \pi r^2$   
 Ableiten:  
 $\frac{dA}{dr} = 2\pi r$   
 impl. Q.2.1.6:  $\frac{dA}{dr} = 2\pi r$

10. Kreisbogenlänge  
 $A = \pi r^2$   
 Ableiten:  
 $\frac{dA}{dr} = 2\pi r$   
 impl. Q.2.1.6:  $\frac{dA}{dr} = 2\pi r$