



โครงการคณิตศาสตร์
เรื่อง การหาพื้นที่แรเงาในส่วนโค้งของวงกลม
โดย

1. นางสาวปนิตา ทิพย์บำรุง
2. นางสาวอชิรญา แก้วมณี

ครูที่ปรึกษา 1. นางสาวเบญจมาศ คงตระกูล
2. นางนิลวรรณ นิลยกานนท์

รายงานฉบับนี้เป็นส่วนประกอบของโครงการคณิตศาสตร์
ประเภทบูรณาการความรู้ในคณิตศาสตร์ไปประยุกต์ใช้
โรงเรียนสอาดเผดิมวิทยา
สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษาสุราษฎร์ธานี ชุมพร
ปีการศึกษา 2569



โครงการคณิตศาสตร์
เรื่อง การหาพื้นที่แรเงาในส่วนโค้งของวงกลม

โดย

1. นางสาวปนิตา ทิพย์บำรุง
2. นางสาวอชิรญา แก้วมณี

ครูที่ปรึกษา 1. นางสาวเบญจมาศ คงตระกูล
2. นางนิลวรรณ นิลยกานนท์

รายงานฉบับนี้เป็นส่วนประกอบของโครงการคณิตศาสตร์
ประเภทบูรณาการความรู้ในคณิตศาสตร์ไปประยุกต์ใช้
โรงเรียนสอาดเผดิมวิทยา
สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษาสุราษฎร์ธานี ชุมพร
ปีการศึกษา 2569

บทคัดย่อ

โครงการคณิตศาสตร์ เรื่อง การหาพื้นที่แรงแเงในส่วนโค้งของ เป็นโครงการคณิตศาสตร์ โดยมีวัตถุประสงค์ดังนี้ 1.เพื่อสร้างรูปพื้นที่แรงแเงของส่วนโค้งที่ได้จากการสร้างทางเรขาคณิตด้วยโปรแกรม GSP 2.เพื่อคิดค้นสูตรในการหาพื้นที่แรงแเงในส่วนโค้งของวงกลม 3.เพื่อตรวจสอบพื้นที่แรงแเงในส่วนโค้งของวงกลมด้วยโปรแกรม GSP กับสูตรที่คิดค้นได้

ผลการดำเนินโครงการพบว่า จากการใช้ โปรแกรมคณิตศาสตร์สำเร็จรูป The Geometer's Sketchpad หรือ GSP ความรู้พื้นฐานทางเรขาคณิต และความรู้ทางตรีโกณมิติ ในการหาพื้นที่แรงแเงส่วนโค้งที่สนใจ ทำให้คณะผู้จัดทำโครงการสามารถคิดค้นสูตรในการหาพื้นที่แรงแเงส่วนโค้งได้ เมื่อทราบความยาวด้านของสี่เหลี่ยมจัตุรัสเพียงด้านเดียว พร้อมทั้งสามารถใช้โปรแกรม GSP ในการตรวจสอบความถูกต้องของสูตรที่ได้ ด้วยการคำนวณจากเครื่องคำนวณในโปรแกรม GSP เปรียบเทียบกับการสำรวจพื้นที่ส่วนโค้งที่ต้องการจากความสัมพันธ์ของพื้นที่รูปเรขาคณิตในรูปที่สร้างขึ้น มีความสอดคล้องและผลลัพธ์ที่ได้เท่ากัน ทำให้ทราบว่า สูตรที่คิดค้นขึ้นสามารถหาพื้นที่ส่วนโค้งที่ต้องการได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์

คณะผู้จัดทำ

กิตติกรรมประกาศ

โครงการคณิตศาสตร์ เรื่อง การหาพื้นที่แรเงาในส่วนโค้งของวงกลม เป็นโครงการคณิตศาสตร์ โดยมีคุณครูเบญจมาศ คงตระกูล และคุณครูนิลวรรณ นิลยกานนท์ เป็นครูที่ปรึกษาให้คำแนะนำข้อมูลในการจัดทำโครงการคณิตศาสตร์ และสถานที่ในการจัดทำโครงการคณิตศาสตร์เป็นอย่างดี ขอขอบพระคุณท่านผู้อำนวยการ นายไกรวัลย์ สังฆะสา และคุณครูทุกท่านในกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ โรงเรียนสอาดเผดิมวิทยา ที่ให้กำลังใจ สอนสั่ง และให้ความรู้ จนทำให้เกิดความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์ สามารถจัดทำโครงการคณิตศาสตร์ได้

คณะผู้จัดทำจึงขอขอบพระคุณมา ณ โอกาสนี้ หากมีข้อผิดพลาดประการใด คณะผู้จัดทำต้องขออภัยไว้ ณ ที่นี้ด้วย

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อ	ก
กิตติกรรมประกาศ	ข
สารบัญ	ค
สารบัญตาราง	ง
สารบัญรูปภาพ	จ
บทที่ 1 บทนำ	1
บทที่ 2 เอกสารที่เกี่ยวข้อง	4
บทที่ 3 วิธีการดำเนินการ	8
บทที่ 4 ผลการดำเนินการ	18
บทที่ 5 สรุป อภิปราย และข้อเสนอแนะ	19
บรรณานุกรม	20

สารบัญตาราง

ตารางที่	หน้า
1	ปฏิทินแสดงการปฏิบัติงาน
2	แสดงการเปรียบเทียบพื้นที่แรงงานไค้งสีแดงโดยใช้โปรแกรม GSP กับการใช้สูตรที่คิดค้นขึ้น

สารบัญรูปภาพ

ภาพที่	หน้า
1 ส่วนประกอบของวงกลม	5
2 ภาพฟังก์ชันตรีโกณมิติ	6
3 โปรแกรม The Geometer's Sketchpad หรือ GSP	7
4 รูปประกอบขั้นตอนการใช้ โปรแกรม The Geometer's Sketchpad หรือ GSP ในการสร้างส่วนโค้งภายในวงกลม	10
5 ภาพพื้นที่แรเงาส่วนโค้งในวงกลมที่ได้จากการสร้างด้วยโปรแกรม GSP	10
6 การหาพื้นที่แรเงาส่วนโค้งในวงกลมสีน้ำเงินโดยใช้รูปเรขาคณิต	12
7 การหาพื้นที่แรเงาสีม่วงของส่วนโค้งในวงกลมโดยใช้รูปเรขาคณิต	13
8 การหาพื้นที่แรเงาส่วนโค้งในวงกลมสีน้ำตาลโดยใช้รูปเรขาคณิต	14
9 การหาพื้นที่แรเงาส่วนโค้งในวงกลมสีเหลืองโดยใช้รูปเรขาคณิต	16
10 การตรวจสอบพื้นที่แรเงาในส่วนโค้งของวงกลมด้วยโปรแกรม GSP กับสูตรที่คิดค้นได้	17

บทที่ 1 บทนำ

ที่มาและความสำคัญของโครงการ

คณิตศาสตร์มีบทบาทสำคัญยิ่งต่อความสำเร็จในการเรียนรู้ในศตวรรษที่ 21 เนื่องจากคณิตศาสตร์ช่วยให้นักเรียนมีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ คิดอย่างมีเหตุผล เป็นระบบ มีแบบแผน สามารถวิเคราะห์ปัญหาหรือสถานการณ์ได้อย่างรอบคอบและถี่ถ้วน ช่วยให้คาดการณ์ วางแผน ตัดสินใจ แก้ปัญหา ได้อย่างถูกต้องเหมาะสมและสามารถนำไปใช้ ในชีวิตจริงได้อย่างมีประสิทธิภาพ นอกจากนี้คณิตศาสตร์ยังเป็นเครื่องมือในการศึกษาด้านวิทยาศาสตร์ เทคโนโลยี และศาสตร์อื่น ๆ อันเป็นรากฐานในการพัฒนาทรัพยากรบุคคลของชาติให้มีคุณภาพและพัฒนาเศรษฐกิจของประเทศให้ทัดเทียมกับนานาชาติ การศึกษาคณิตศาสตร์จึงจำเป็นต้องมีการพัฒนาอย่างต่อเนื่อง เพื่อให้ทันสมัยและสอดคล้องกับสภาพเศรษฐกิจ สังคม และความรู้ทางวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีที่เจริญก้าวหน้าอย่างรวดเร็วในยุคโลกาภิวัตน์ (สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน, กระทรวงศึกษาธิการ, 2560, หน้า 8)

เรขาคณิตเป็นสาระหนึ่งที่สำคัญในการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ซึ่งเกี่ยวข้องกับรูปเรขาคณิตและสมบัติของรูปเรขาคณิตหนึ่งมิติ สองมิติ และสามมิติ การนิยามภาพ แบบจำลองทางเรขาคณิต ทฤษฎีบททางเรขาคณิต การแปลงทางเรขาคณิต (geometric transformation) ในเรื่องการเลื่อนขนาน (translation) การสะท้อน (reflection) และการหมุน (rotation) การวัดและเรขาคณิตเป็นสาระหลักที่สำคัญหนึ่ง ในการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ตามหลักสูตรแกนกลางขั้นพื้นฐาน ซึ่งเป็นการเรียนรู้เกี่ยวกับ ความยาว ระยะทาง น้ำหนัก พื้นที่ ปริมาตรและความจุเงินและเวลา หน่วยวัดระบบต่าง ๆ การคาดคะเนเกี่ยวกับการวัด อัตราส่วนตรีโกณมิติ รูปเรขาคณิต และสมบัติของรูปเรขาคณิต การนิยามภาพ แบบจำลองทางเรขาคณิต ทฤษฎีบททางเรขาคณิต การแปลงทางเรขาคณิตในเรื่องการเลื่อนขนาน การสะท้อน การหมุน และการนำความรู้เกี่ยวกับการวัดและเรขาคณิตไปใช้ในสถานการณ์ต่าง ๆ ความรู้เกี่ยวกับเรขาคณิต มีส่วนเกี่ยวข้องสัมพันธ์กับชีวิตประจำวันของมนุษย์เราอย่างมาก เราใช้เรขาคณิตในชีวิตจริงเพื่อทำความเข้าใจ หรืออธิบายสิ่งต่าง ๆ รอบตัว เช่น ใช้เรขาคณิตในการสำรวจพื้นที่ สร้างผังเมือง สร้างถนนหนทาง สำรวจโลกและอวกาศหรือบางครั้งเราอาจแทนความคิดหรือสิ่งต่าง ๆ ด้วยรูปเรขาคณิต เรขาคณิตช่วยพัฒนาทักษะที่สำคัญหลายประการ เช่น ทักษะเชิงมิติสัมพันธ์ หรือ ความรู้สึกเชิงปริภูมิ การคิด การให้เหตุผล และการคิดสร้างสรรค์ ซึ่งทักษะเหล่านี้เป็นพื้นฐานการเรียนรู้คณิตศาสตร์เรื่องอื่น ๆ เช่น จำนวน การวัด ตลอดจนเนื้อหาคณิตศาสตร์ขั้นสูงต่อไป นอกจากนี้เรขาคณิตยังเป็นพื้นฐานในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์กับความรู้แขนงอื่น ๆ อีกด้วย เพื่อให้ผู้เรียนมีความรู้ความเข้าใจเรขาคณิต สามารถใช้ความรู้และเชื่อมโยงความรู้เรขาคณิตกับความรู้แขนงอื่น ๆ ได้ และความรู้เรื่องตรีโกณมิติ จากภาษากรีก *trigonon* มุม 3 มุม และ *metro* การวัด เป็นสาขาหนึ่งของคณิตศาสตร์ที่ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างความยาวและมุมของรูปสามเหลี่ยม ซึ่งมีความสัมพันธ์โดยตรงกับรูปสามเหลี่ยม ในปัจจุบัน มีการนำตรีโกณมิติไปใช้ในงานสาขาต่าง ๆ เช่น เป็นเทคนิคในการสร้างรูปสามเหลี่ยม ซึ่งใช้ในวิชาดาราศาสตร์เพื่อวัดระยะทางของดาวที่อยู่ใกล้ ในภูมิศาสตร์ใช้วัดระยะทางระหว่างหลักเขตที่ดิน และใช้ในดาวเทียมนำทาง งานที่มีการใช้(และการนำทางในมหาสมุทร บนเครื่องบิน และในอวกาศ) ,ทฤษฎีดนตรี, สุนศาสตร์, ทัศนศาสตร์, การวิเคราะห์ตลาดการเงิน, อิเล็กทรอนิกส์, ทฤษฎีความ

น่าจะเป็น, สถิติศาสตร์, ชีววิทยา, การสร้างภาพทางการแพทย์ (การกราดภาพตัดขวางใช้คอมพิวเตอร์ช่วย (CAT scans) และ คลื่นเสียงความถี่สูง) , เกสศาสตร์, เคมี, ทฤษฎีจำนวน (รวมถึง วิทยาการเข้ารหัสลับ) , วิทยาแผ่นดินไหว, อุตุนิยมวิทยา, สมุทรศาสตร์, วิทยาศาสตร์กายภาพสาขาต่างๆ, การสำรวจพื้นดิน และ ภูมิมาตรศาสตร์, สถาปัตยกรรม, สัทศาสตร์, เศรษฐศาสตร์, วิศวกรรมไฟฟ้า, วิศวกรรมเครื่องกล, วิศวกรรมโยธา, เรขภาพคอมพิวเตอร์, การทำแผนที่, ผลึกศาสตร์ ฯลฯ

คณะผู้จัดทำโครงการมีความสนใจในการนำความรู้เรื่องตรีโกณมิติในการใช้หาพื้นที่แรงแเงในรูปเรขาคณิตที่เป็นส่วนโค้งในรูปวงกลม โดยทำการสืบค้น ทดลองและสำรวจ ฝึกการมองภาพ วาดภาพ และเปรียบเทียบรูปปร่างในตำแหน่งต่าง ๆ เพื่อความรวดเร็วในการจำลองภาพและการสำรวจ คณะผู้จัดทำโครงการได้ใช้ โปรแกรม The Geometer's Sketchpad หรือ GSP ซึ่งเป็นโปรแกรมสำหรับการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ โดยบูรณาการสาระที่เกี่ยวข้องกับความรู้คณิตศาสตร์และทักษะด้านเทคโนโลยีเข้าด้วยกัน ใช้ในการสร้างรูปเรขาคณิตด้วยรูปวงกลม สี่เหลี่ยม สามเหลี่ยมจนทำให้ได้รูปส่วนโค้งที่สนใจ คณะผู้จัดทำเกิดความสนใจนำไปสู่การพิสูจน์ทางมิติของเรขาคณิตโดยใช้ความสัมพันธ์และความรู้เกี่ยวกับตรีโกณมิติในการหาสูตรพื้นที่แรงแเงที่ได้ พร้อมกับการตรวจสอบการหาพื้นที่จากการสำรวจด้วยโปรแกรม GSP เพื่อตรวจสอบสูตรพื้นที่ที่ได้ให้เกิดความถูกต้องแม่นยำ และนำไปประยุกต์ในการใช้ทำโจทย์หรือข้อสอบต่างๆต่อไป

วัตถุประสงค์

1. เพื่อสร้างรูปพื้นที่แรงแเงของส่วนโค้งที่ได้จากการสร้างทางเรขาคณิตด้วยโปรแกรม GSP
2. เพื่อคิดค้นสูตรในการหาพื้นที่แรงแเงในส่วนโค้งของวงกลม
3. เพื่อตรวจสอบพื้นที่แรงแเงในส่วนโค้งของวงกลมด้วยโปรแกรม GSP กับสูตรที่คิดค้นได้

สาระที่เกี่ยวข้อง

1. พื้นฐานทางมิติของเรขาคณิต
2. วงกลม
3. ตรีโกณมิติ
4. โปรแกรม The Geometer's Sketchpad หรือ GSP

ขอบเขตของการศึกษาโครงการ

ตัวแปร

ตัวแปรต้น : ความยาวรัศมีของวงกลม

ตัวแปรตาม : สูตรของพื้นที่แรงแเงในส่วนโค้งของวงกลม

สมมติฐาน

- ความยาวรัศมีของวงกลมมีผลต่อการหาสูตรของพื้นที่แรงแ้งในส่วนโค้งของวงกลม

ระยะเวลาในการดำเนินงาน

วันที่ 1 เดือนสิงหาคม พ.ศ.2569 ถึง วันที่ 18 เดือนสิงหาคม พ.ศ.2569

ประโยชน์ที่ได้รับจากการทำโครงการ

1. ได้ฝึกฝนการออกแบบทางเทคโนโลยีสามารถสร้างรูปทางเรขาคณิตด้วยโปรแกรมสำเร็จรูปได้
2. ได้ศึกษาเนื้อหา คณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง ประยุกต์ความรู้กับศาสตร์อื่น ๆ ได้
3. มีความรู้เรื่องรูปเรขาคณิต ตรีโกณมิติ ปรับใช้ในชีวิตประจำวันกับความรู้ในเรื่องอื่นๆ หรือสาขาต่างๆ ในระดับสูงๆต่อไป

บทที่ 2 เอกสารที่เกี่ยวข้อง

การทำโครงการคณิตศาสตร์ครั้งนี้ มีการศึกษาค้นคว้าเอกสารและส่วนที่เกี่ยวข้อง ดังนี้

1. พื้นฐานทางมิติของเรขาคณิต
2. วงกลม
3. ตรรกมิติ
4. โปรแกรม The Geometer's Sketchpad หรือ GSP

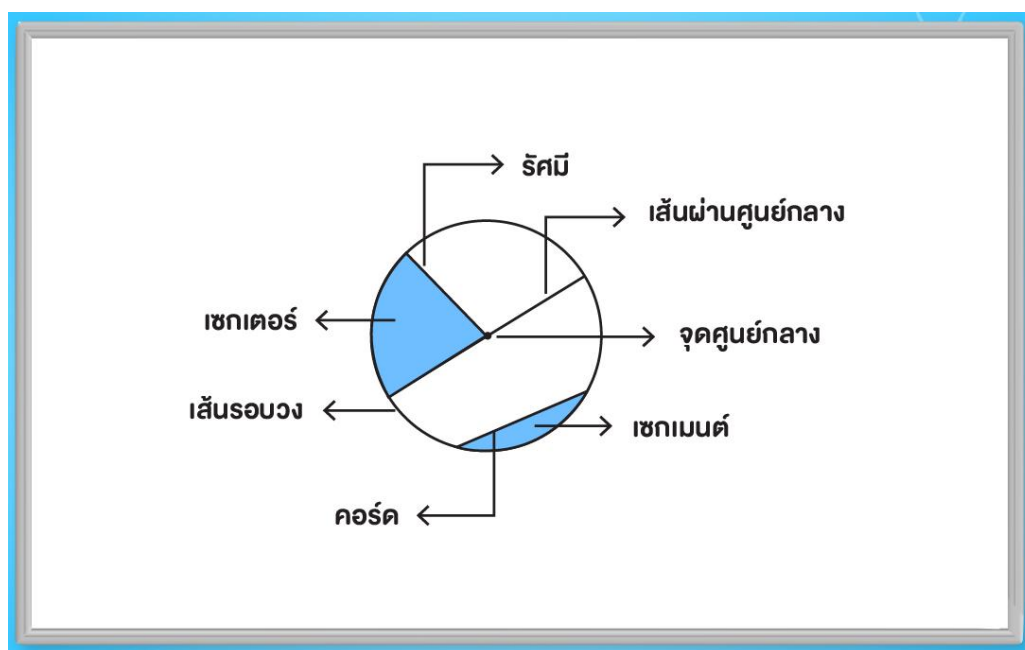
1. พื้นฐานทางมิติเรขาคณิต

มิติเรขาคณิตกำเนิดขึ้นเพื่อการคำนวณและวัดพื้นที่ แรกเริ่มถูกพัฒนาขึ้นในดินแดนอารยธรรมของโลกจากลุ่มแม่น้ำทั้งสี่คืออารยธรรมอียิปต์ อารยธรรมเมโสโปเตเมีย อารยธรรมลุ่มแม่น้ำสินธุ และอารยธรรมลุ่มแม่น้ำฮวงโห และต่อมานักคณิตศาสตร์ชาวกรีกนาม “ยุคลิด” ได้นำเรขาคณิตมาศึกษาเพิ่มเติมและได้สร้างรากฐานและเครื่องมือทางการคำนวณขึ้นมากมาย หนึ่งในนั้นคือนิยามพื้นฐานของเรขาคณิตเพื่อให้สามารถแก้โจทย์ทางคณิตศาสตร์ได้ และนักคณิตศาสตร์ในยุคต่อๆมาได้นำมาแก้ไขและพัฒนาให้สมบูรณ์ครบถ้วนต่อไป

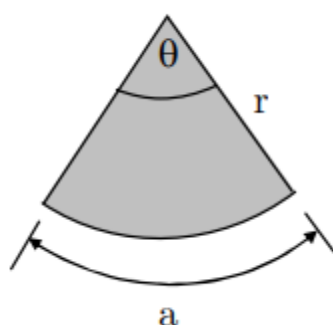
เรขาคณิต เป็นแขนงหนึ่งของคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวกับรูปร่าง และขนาดของสิ่งของรอบๆ ตัวเรา เป็นวิชาว่าด้วยความสัมพันธ์ระหว่างเส้น มุม การวัดพื้นที่ และปริมาตร ส่วนที่กล่าวถึงรูปบนพื้นราบ เช่น รูปสามเหลี่ยม รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า รูปจัตุรัส และวงกลม เรียกว่า เรขาคณิตระนาบ ส่วนที่กล่าวถึงรูปทรง เช่น ลูกบาศก์ ทรงกลม กรวยกลม และกรวยเหลี่ยม (พีระมิด) เรียกว่า เรขาคณิตสามมิติ มีประโยชน์ในการก่อสร้าง เช่น การออกแบบสร้างอาคาร การสร้างถนน สะพาน และเขื่อนกั้นน้ำ การคำนวณในวิชาดาราศาสตร์ การเดินเรือ การสำรวจ และการรังวัดที่ดิน

2. วงกลม

เมื่อให้จุดๆ หนึ่งเคลื่อนที่ไปรอบๆ จุดคงที่จุดหนึ่ง โดยจุดที่เคลื่อนที่ และจุดคงที่นั้นมีระยะห่างเท่ากันเสมอ เส้นที่ได้จะเป็นเส้นโค้ง เรียกว่า วงกลม หรือเส้นรอบวง เราเรียกจุดคงที่นั้นว่า จุดศูนย์กลาง และระยะที่เท่ากันนั้นเรียกว่า รัศมีของวงกลม ถ้าลากเส้นตรงจากจุดใดจุดหนึ่งบนวงกลมให้ผ่านจุด ศูนย์กลางไปพบวงกลมนั้นอีกข้างหนึ่ง เราเรียกเส้นนั้นว่า เส้นผ่านศูนย์กลาง ดังนั้นเส้นผ่านศูนย์กลาง มีความยาวเป็นสองเท่าของรัศมีของวงกลม นักคณิตศาสตร์ในสมัยโบราณได้พบว่า อัตราส่วนของความยาวของเส้นรอบวง ต่อความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลาง มีค่าคงที่ ไม่ว่าวงกลมจะมีขนาดเท่าใด เราเรียกค่าคงที่นี้ว่า π (อ่านว่าพาย) π เป็นจำนวนอตรรกยะ มีค่าประมาณ 3.14159 หรือประมาณ 22/7



ภาพที่ 1 ส่วนประกอบของวงกลม



$$\begin{aligned} \text{การหาค่าพื้นที่ของเซกเตอร์} &= \frac{\theta}{360} \pi r^2 \\ &= \frac{1}{2} \times a \times r \end{aligned}$$

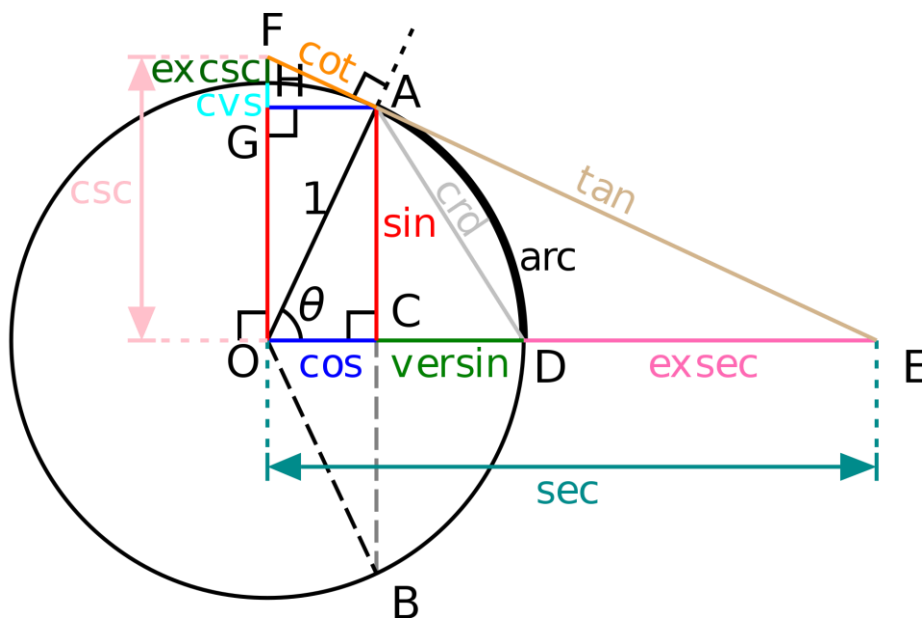
เมื่อ θ แทนค่ามุมกลางของเซกเตอร์เป็นหน่วยองศา และ r แทนค่ารัศมีของวงกลม

3. ตรีโกณมิติ

ตรีโกณมิติเป็นแขนงหนึ่งของคณิตศาสตร์ ว่าด้วยการวัดรูปสามเหลี่ยมต่างๆ โดยหาความสัมพันธ์ระหว่างด้าน มุม และพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม มีความสำคัญ ต่อวิชาดาราศาสตร์ การเดินเรือ และงานสำรวจ ใช้ในการคำนวณส่วนสูงของภูเขา และหาความกว้าง ของแม่น้ำ มีประโยชน์มากสำหรับวิชาวิทยาศาสตร์ วิศวกรรมศาสตร์ และการศึกษาเกี่ยวกับวัตถุ ซึ่งมีสภาพเป็นคลื่น เช่น แสง เสียง แม่เหล็กไฟฟ้า และวิทยุ ส่วนที่กล่าวถึงรูปสามเหลี่ยมบนพื้นราบ เรียกว่า **ตรีโกณมิติระนาบ** ส่วนที่กล่าวถึงรูปสามเหลี่ยมบนพื้นผิวทรงกลม เรียกว่า **ตรีโกณมิติทรงกลม**

ตรีโกณมิติ จากภาษากรีก *trigonon* มุม 3 มุม และ *metro* การวัด เป็นสาขาหนึ่งของคณิตศาสตร์ที่ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างความยาวและมุมของรูปสามเหลี่ยม ตรีโกณมิติเกิดขึ้นในสมัยเฮลเลนิสต์ ในศตวรรษที่ 3 ก่อนคริสต์ศักราช ปัจจุบันได้มีการนำไปใช้ตั้งแต่ในวิชาเรขาคณิตไปจนถึงวิชาดาราศาสตร์

นักดาราศาสตร์ในศตวรรษที่ 3 ได้สังเกตว่าความยาวด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากและมุมระหว่างด้านมีความสัมพันธ์ที่คงที่ ถ้าทราบความยาวอย่างน้อยหนึ่งด้านและค่าของมุมหนึ่งมุม แล้วมุมและความยาวอื่น ๆ ที่เหลือก็สามารถคำนวณหาได้ การคำนวณเหล่านี้ได้ถูกนิยามเป็นฟังก์ชันตรีโกณมิติ และในปัจจุบันได้แพร่หลายไปทั้งคณิตศาสตร์บริสุทธิ์และคณิตศาสตร์ประยุกต์ เช่น การแปลงฟูรีเย หรือสมการคลื่น หรือการใช้ฟังก์ชันตรีโกณมิติเพื่ออธิบายปรากฏการณ์ที่เป็นคาบในสาขาวิชาฟิสิกส์ วิศวกรรมเครื่องกล วิศวกรรมไฟฟ้า ดนตรีและสวนศาสตร์ ดาราศาสตร์ นิเวศวิทยา และชีววิทยา นอกจากนี้ ตรีโกณมิติยังเป็นพื้นฐานของการสำรวจ



ภาพที่ 2 ภาพฟังก์ชันตรีโกณมิติ

โปรแกรม The Geometer's Sketchpad หรือ GSP

โปรแกรม The Geometer's Sketchpad หรือ GSP สำหรับการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ เป็นการบูรณาการสาระที่เกี่ยวข้องกับความรู้คณิตศาสตร์และทักษะด้านเทคโนโลยีเข้าด้วยกัน ทำให้ผู้เรียนมีโอกาสพัฒนาพหุปัญญาอันได้แก่ ปัญญาทางด้านภาษา ด้านตรรกศาสตร์ด้านมิติสัมพันธ์และด้านศิลปะ โปรแกรม GSP มีลักษณะเป็น Dynamic software ที่ช่วยให้ผู้เรียนมีโอกาสเรียนคณิตศาสตร์ โดยการสร้างองค์ความรู้ใหม่ๆ หรือสร้างความคิดรวบยอดต่างๆ ทางคณิตศาสตร์ได้ด้วยตนเอง เนื่องจากเวลาใช้โปรแกรม GSP ผู้เรียนสามารถสร้างตัวแบบคณิตศาสตร์ (Mathematical Model) ที่ทำให้เกิดการเคลื่อนไหวเชิงเรขาคณิต และผู้เรียนสามารถมีปฏิสัมพันธ์โต้ตอบกับโปรแกรมได้ โปรแกรม GSP สามารถนำมาใช้สร้างรูปเรขาคณิตที่เคลื่อนไหวได้ซึ่งนำไปสู่การค้นหาคำตอบต่างๆ ทางเรขาคณิต โดยผู้เรียนสามารถสำรวจ ตั้งข้อสังเกต คาดเดาและสืบเสาะตรวจสอบเพื่อยืนยันเหตุผลของตนเอง ทำให้เกิดจินตนาการในการค้นคว้าหาเหตุผลเป็นการเพิ่มพูนความรู้ให้กับผู้เรียน และพัฒนาความคิดรวบยอดเกี่ยวกับเนื้อหาสาระต่างๆ ในวิชาคณิตศาสตร์ไม่ว่าจะเป็นทางเรขาคณิต พีชคณิต ตรีโกณมิติ แคลคูลัส ได้เป็นอย่างดี นอกจากนี้สำหรับผู้สอนเองก็สามารถนำเอาโปรแกรม GSP มาช่วยเป็นสื่อในการสร้างบรรยากาศของการเรียนการสอนที่ส่งเสริมให้มีการนำเสนอความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์ความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ตลอดจนมีการนำเสนอที่น่าสนใจตื่นเต้นเร้าใจซึ่งทำให้ผู้เรียนเกิดความสนใจ มีการซักถาม การโต้ตอบ ซึ่งจะช่วยให้ผู้เรียนตั้งข้อคำถามเหตุการณ์และหาข้อสรุปในเวลาเรียนหรือในช่วงเวลาที่น่าเสนอได้ซึ่งขอบเขตของการใช้งานโปรแกรมนั้นก็ขึ้นอยู่กับจินตนาการของผู้เรียนเองส่วนประเทศไทยนั้นสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ได้ซื้อลิขสิทธิ์ โปรแกรม GSP เวอร์ชัน 4.06 จากบริษัท Key Curriculum Press เมื่อประมาณปลายปีพ.ศ. 2547 และแปลเป็นภาษาไทย (Thai Version) เพื่อให้สามารถเรียนรู้ได้ง่ายและสะดวกมากขึ้น



ภาพที่ 3 โปรแกรม The Geometer's Sketchpad หรือ GSP

บทที่ 3 วิธีการดำเนินการ

กลุ่มผู้จัดทำโครงการคณิตศาสตร์จะกล่าวถึงวิธีการดำเนินงาน ดังนี้

1. ปฏิทินการปฏิบัติงาน
2. ขั้นตอนการดำเนินงาน
3. ขั้นตอนการสร้างรูปพื้นที่แรงงาของส่วนโค้งที่ได้จากการสร้างทางเรขาคณิตด้วยโปรแกรม GSP
4. ขั้นตอนการคิดค้นสูตรในการหาพื้นที่แรงงาในส่วนโค้งของวงกลม
5. ขั้นตอนการตรวจสอบพื้นที่แรงงาในส่วนโค้งของวงกลมด้วยโปรแกรม GSP กับสูตรที่คิดค้นได้

1. ปฏิทินการปฏิบัติงาน

ลำดับที่	รายการ	ระยะเวลา	คณะผู้รับผิดชอบ
1	ศึกษาวิธีการทำโครงการคณิตศาสตร์และ คิดเรื่องที่จะทำโครงการคณิตศาสตร์	1- 2 สิงหาคม 2569	คณะผู้จัดทำ
2	ประชุมวางแผนการทำโครงการคณิตศาสตร์	3 สิงหาคม 2569	คณะผู้จัดทำ/ครูที่ปรึกษา
3	เขียนเค้าโครง โครงการคณิตศาสตร์	4-5 สิงหาคม 2569	คณะผู้จัดทำ
4	คุณครูที่ปรึกษาแบ่งหน้าที่รับผิดชอบ	6 สิงหาคม 2569	คณะผู้จัดทำ/ครูที่ปรึกษา
5	วางแผนการดำเนินงาน	7 สิงหาคม 2569	คณะผู้จัดทำ/ครูที่ปรึกษา
6	ศึกษาเกี่ยวกับการใช้ โปรแกรม The Geometer's Sketchpad หรือ GSP ใน การสร้างรูปพื้นที่แรงงาของส่วนโค้ง	8-9 สิงหาคม 2569	คณะผู้จัดทำ
7	คิดค้นสูตรในการหาพื้นที่แรงงาในส่วนโค้ง ของวงกลม	10-11 สิงหาคม 2569	คณะผู้จัดทำ
8	ตรวจสอบพื้นที่แรงงาในส่วนโค้งของวงกลม ด้วยโปรแกรม GSP กับสูตรที่คิดค้นได้	12-13 สิงหาคม 2569	คณะผู้จัดทำ
9	จัดทำรายงานและเอกสารรูปเล่มโครงการ	14 สิงหาคม 2569	คณะผู้จัดทำ/ครูที่ปรึกษา
10	ทำสื่อนำเสนอประกอบและฝึกซ้อมการ นำเสนอโครงการต่อครูที่ปรึกษา	15-17 สิงหาคม 2569	คณะผู้จัดทำ/ครูที่ปรึกษา
11	นำเสนอโครงการต่อคณะกรรมการ	18 สิงหาคม 2569	คณะผู้จัดทำ/ครูที่ปรึกษา

ตารางที่ 1 ปฏิทินแสดงการปฏิบัติงาน

2. ขั้นตอนในการดำเนินงาน

1. คิดหัวข้อโครงการเพื่อนำเสนอครูที่ปรึกษาโครงการ
2. ศึกษาข้อมูลเรื่องที่สนใจคือ เรื่องรูปเรขาคณิต วงกลม และตรีโกณมิติ
3. รวบรวมข้อมูลที่ได้มาวิเคราะห์เพื่อใช้ในการสร้างรูปพื้นที่แรงแงของส่วนโค้งโดยโปรแกรม

Geometer's Sketchpad (GSP)

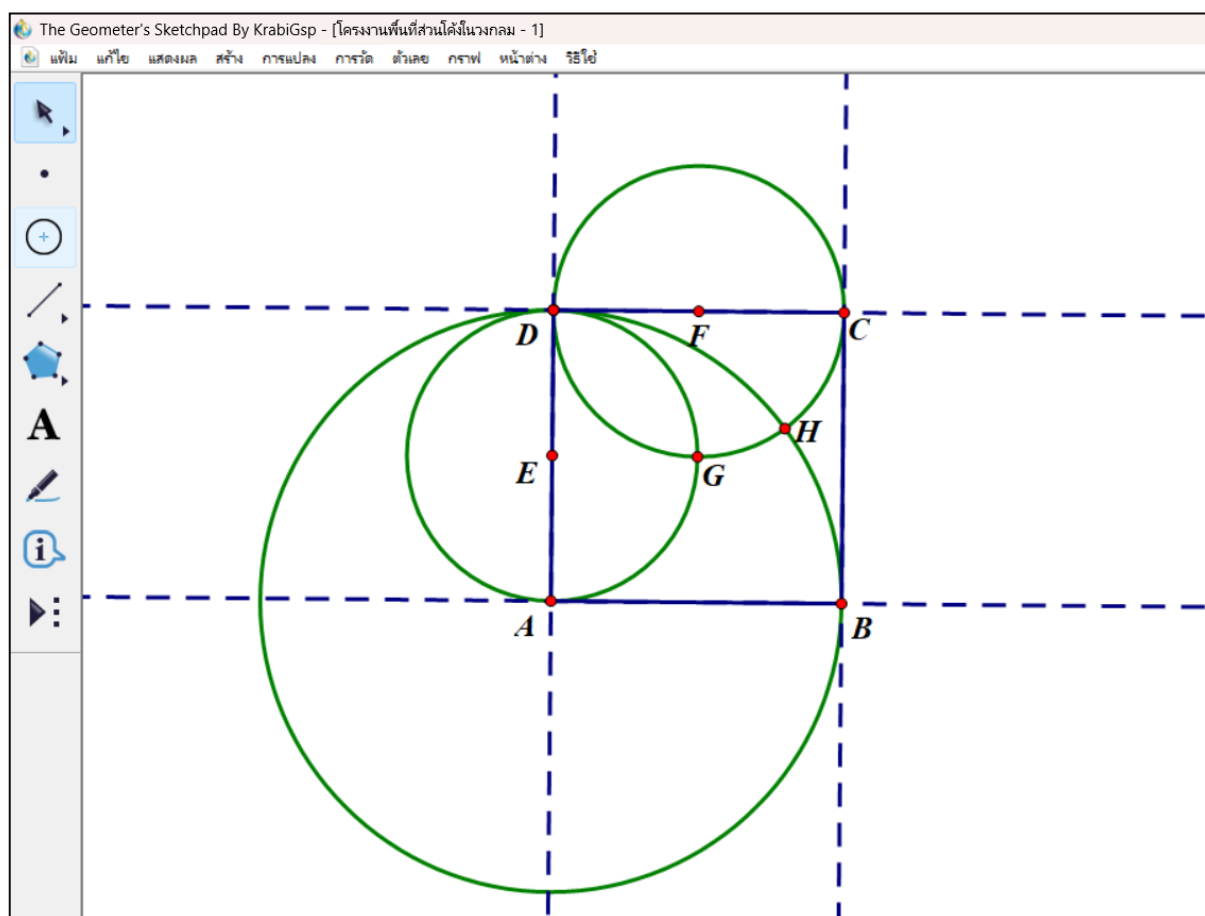
4. การสืบค้น สืบค้นเพื่อคิดค้นสูตรในการหาพื้นที่แรงแงในส่วนโค้งของวงกลม
5. ตรวจสอบพื้นที่แรงแงในส่วนโค้งของวงกลมด้วยโปรแกรม GSP กับสูตรที่คิดค้นได้
6. สรุปผลการดำเนินงาน และวิเคราะห์ผลการดำเนินงานทั้งหมด
7. ประเมินงานและตรวจสอบ สรุปผลการดำเนินงาน
8. เขียนรายงานและจัดทำบอร์ดโครงการ
9. ฝึกเตรียมการนำเสนอโครงการต่อครูที่ปรึกษา
10. นำเสนอโครงการต่อคณะกรรมการ

3. ขั้นตอนการสร้างรูปพื้นที่แรงแงของส่วนโค้งที่ได้จากการสร้างทางเรขาคณิตด้วยโปรแกรม

โปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP)

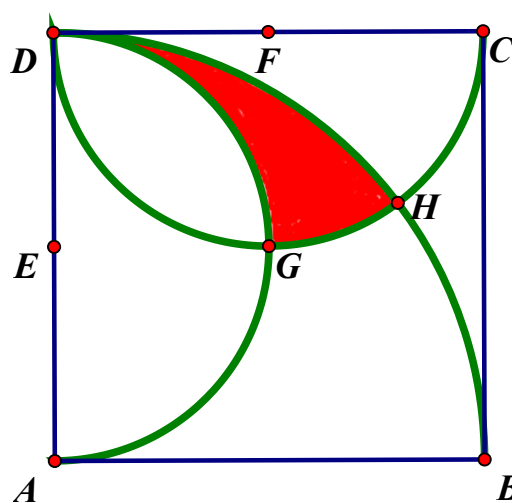
การสร้างรูปพื้นที่แรงแงของส่วนโค้งที่ได้จากการสร้างทางเรขาคณิตด้วยโปรแกรม GSP มีลำดับการสร้างดังต่อไปนี้

1. สร้างส่วนของเส้นตรง AB ให้ จุด A เป็นจุดศูนย์กลาง หมุน ส่วนของเส้นตรง AB ขนาด 90 องศา
2. สร้างเส้นตั้งฉาก AB ที่ จุด B และ A จะได้จุด C และ D ตามลำดับ
3. สร้างเส้นขนาน ส่วนของเส้นตรง AB ที่จุด C และ D ทำให้เกิด รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ABCD
4. กำหนด จุด A เป็นจุดศูนย์กลาง สร้างวงกลมรัศมี AB
5. สร้างจุด E เป็นจุดกึ่งกลาง AD และ จุด F เป็นจุดกึ่งกลางของ CD
6. กำหนด จุด E เป็นจุดศูนย์กลาง สร้างวงกลม รัศมี EA
7. กำหนด จุด F เป็นจุดศูนย์กลาง สร้างวงกลม รัศมี FD
8. สร้างจุดตัดของวงกลม จุด G และ จุด H



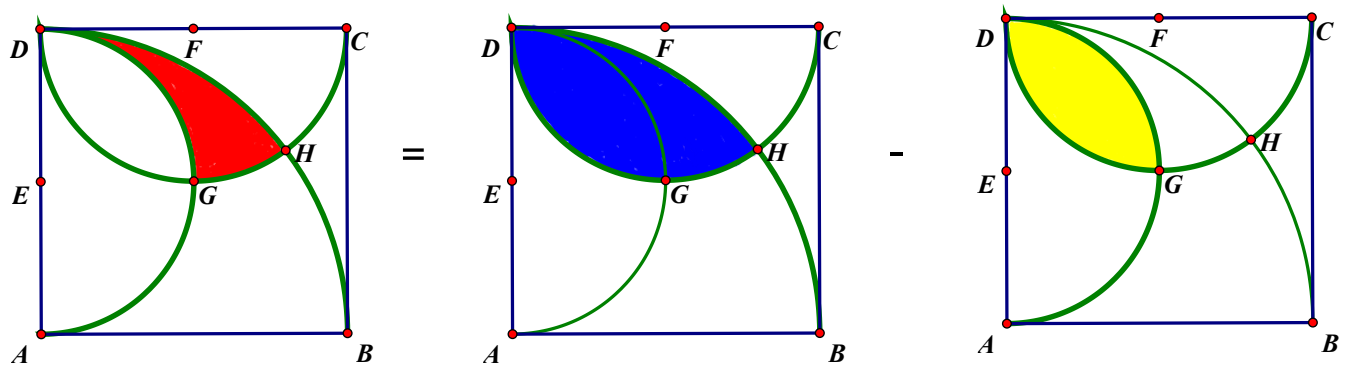
ภาพที่ 4 รูปประกอบขั้นตอนการใช้ โปรแกรม The Geometer's Sketchpad หรือ GSP

ในการสร้างส่วนโค้งภายในวงกลม

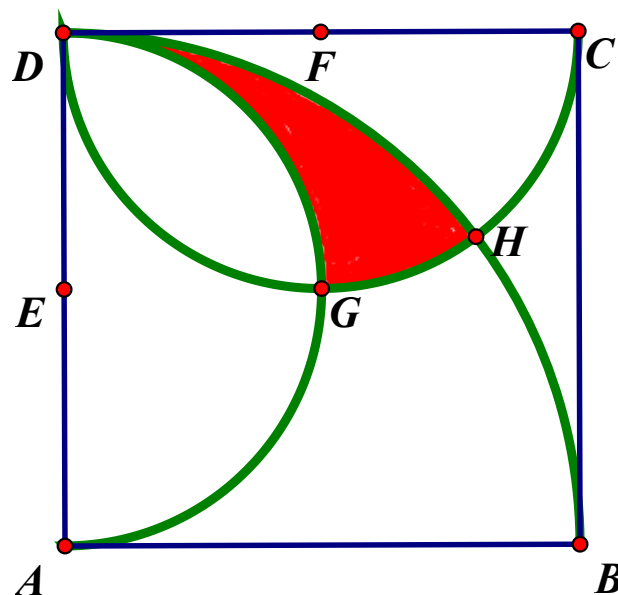


ภาพที่ 5 ภาพพื้นที่แรเงาสวนโค้งในวงกลมที่ได้จากการสร้างด้วยโปรแกรม GSP

4. ขั้นตอนการคิดค้นสูตรในการหาพื้นที่แรเงาในส่วนโค้งของวงกลม



$$\text{พื้นที่สีแดง} = \text{พื้นที่สีน้ำเงิน} - \text{พื้นที่สีเหลือง}$$



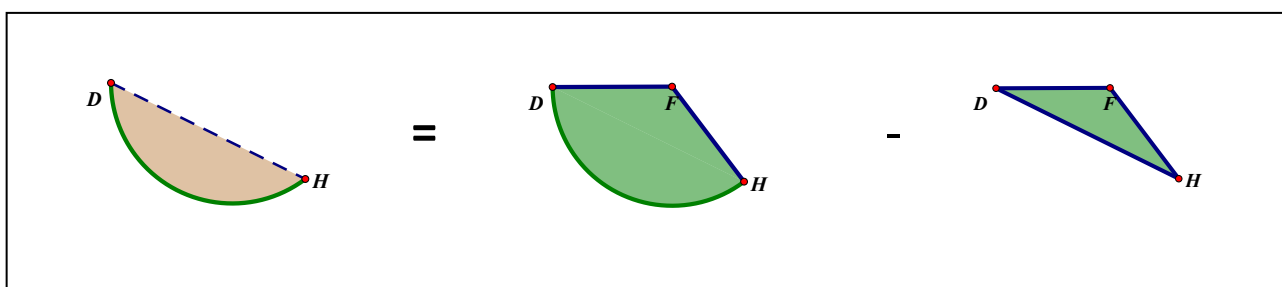
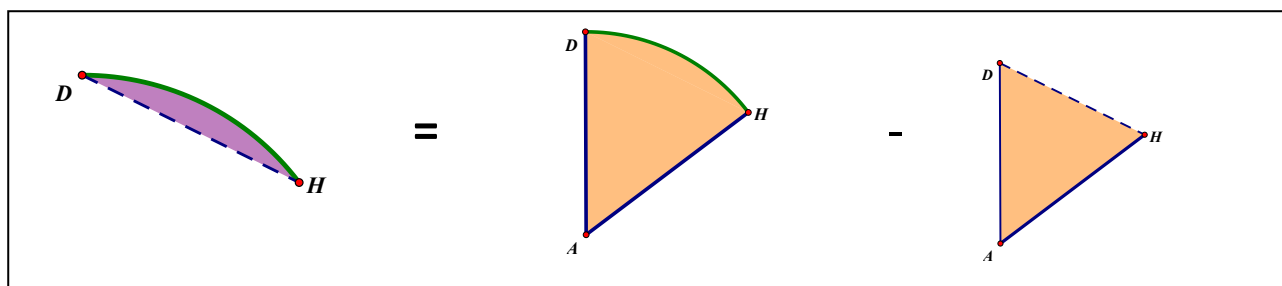
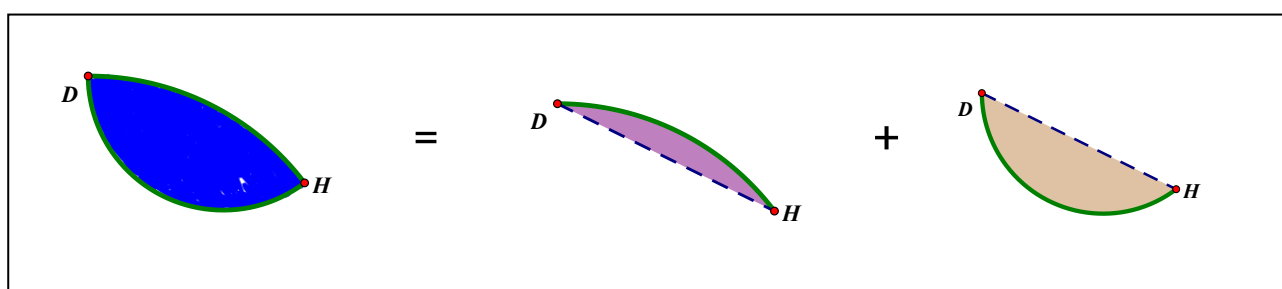
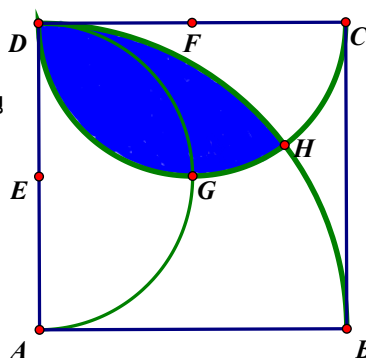
กำหนดให้ $\square ABCD$ เป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัส AB มีความยาว R หน่วย

ให้ จุด E และจุด F เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน AD และ ด้าน CD ตามลำดับ

$$ED = AE = CF = FD = \mathbf{r} \quad \text{จะได้ว่า } AB = R = 2\mathbf{r}$$

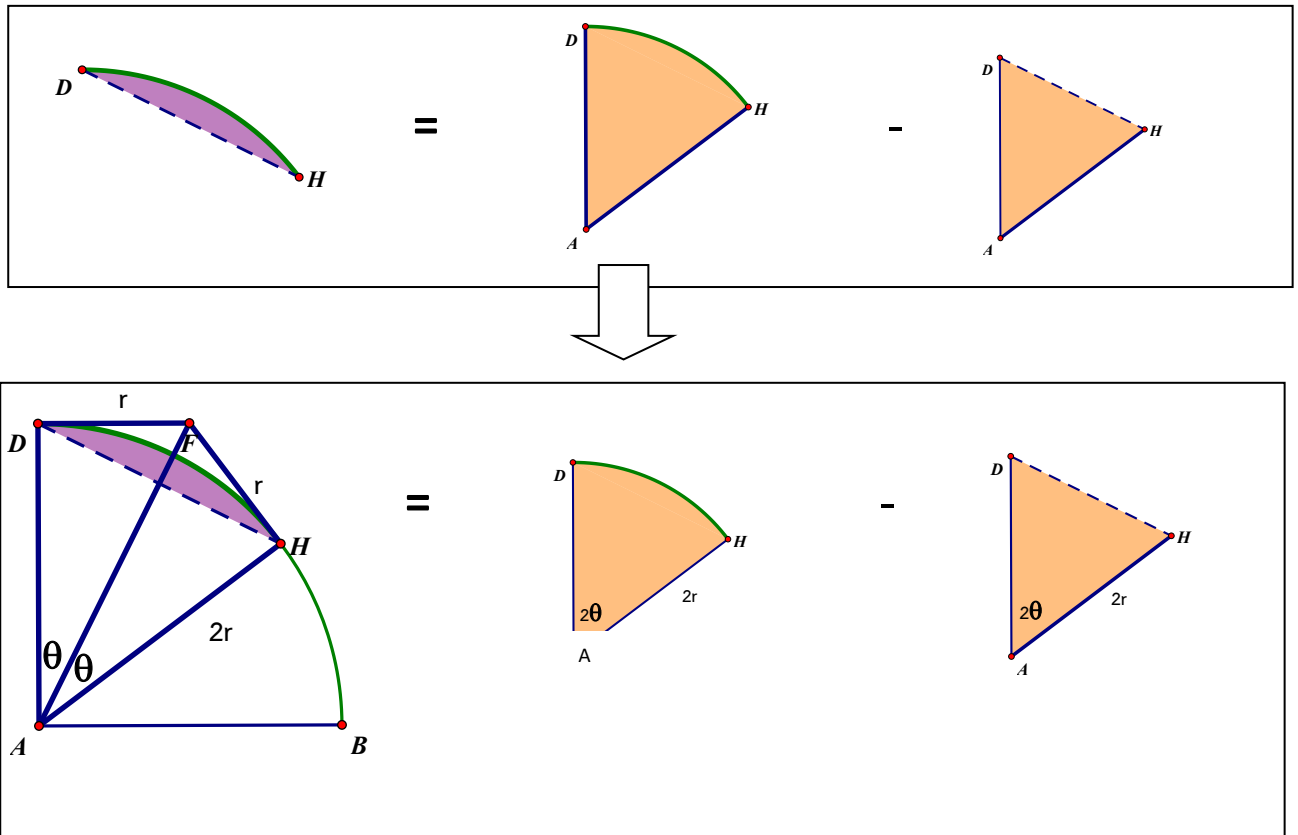
ขั้นตอนการพิสูจน์

4.1 การหาพื้นที่ส่วนโค้งสีน้ำเงิน



ภาพที่ 6 การหาพื้นที่แรเงาสีน้ำเงินในวงกลมสีน้ำเงินโดยใช้รูปเรขาคณิต

4.1.1 การหาพื้นที่แรเงาสีม่วงของส่วนโค้งในวงกลม



ภาพที่ 7 การหาพื้นที่แรเงาสีม่วงของส่วนโค้งในวงกลมโดยการใช้รูปเรขาคณิต

$$\text{พื้นที่แรเงาสีม่วง} = \frac{1}{2} [(2r)^2 (2\theta)] - \frac{1}{2} [(2r)^2 \sin(2\theta)]$$

$$= \frac{1}{2} [(4r^2) (2\theta)] - \frac{1}{2} [(4r^2) \cdot \frac{4}{5}]$$

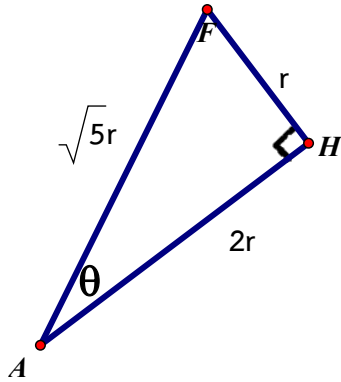
$$= 2r^2 (2\theta) - \frac{8r^2}{5}$$

$$= 2r^2 (2\arctan 0.5) - \frac{8r^2}{5}$$

$$= 4r^2 (\arctan 0.5) - \frac{8r^2}{5}$$

***หมายเหตุ พิจารณา $\triangle AHF$ จะได้ ว่า $AH = 2r$, $FH = r$

จาก ทฤษฎีบทพีทาโกรัสจะได้ $AF = \sqrt{5}r$



$$\theta = \arctan\left(\frac{r}{2r}\right) = \arctan\left(\frac{1}{2}\right)$$

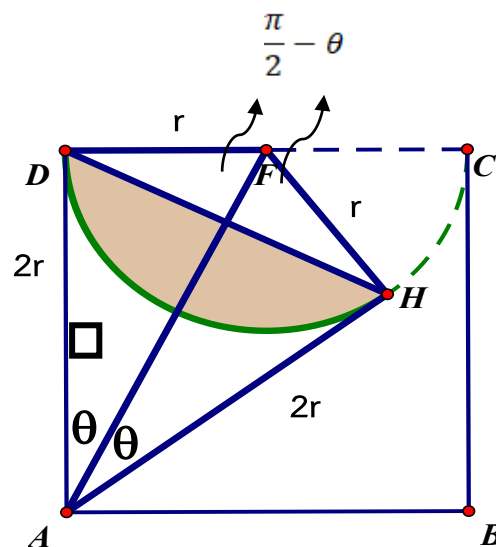
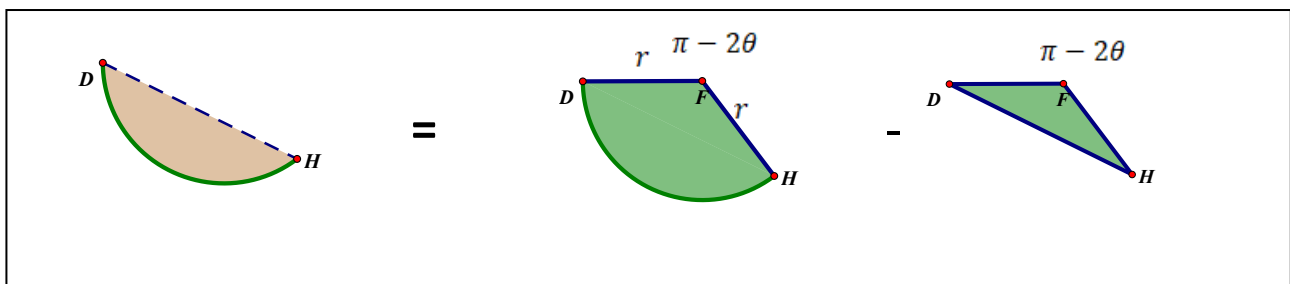
$$\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$= 2\sin\theta\cos\theta$$

$$= 2\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

$$= \frac{4}{5}$$

4.1.2 การหาพื้นที่แรเงาส่วนโค้งสีน้ำตาล

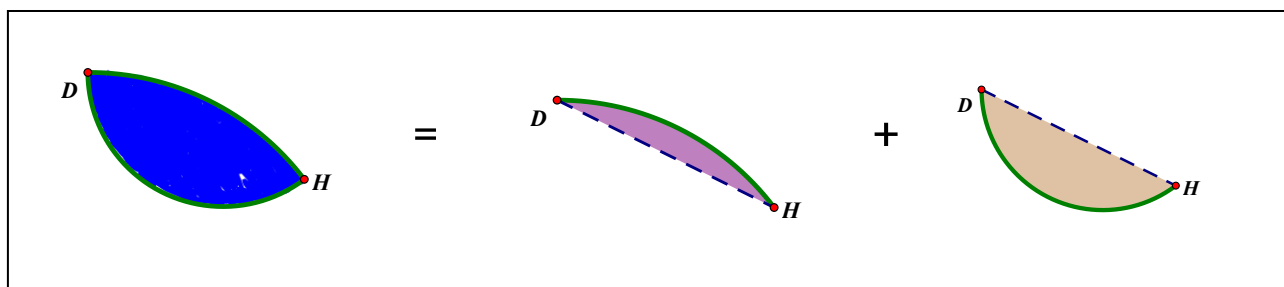


ภาพที่ 8 การหาพื้นที่แรเงาส่วนโค้งในวงกลมสีน้ำตาลโดยใช้รูปเรขาคณิต

$$\begin{aligned}
\text{พื้นที่แรเงาสีน้ำตาล} &= \frac{r^2(\pi - 2\theta)}{2} - \frac{r^2 \sin(\pi - 2\theta)}{2} \\
&= \frac{r^2}{2} (\pi - 2\arctan 0.5) - \frac{r^2}{2} \sin(2\theta) \\
&= \frac{r^2}{2} (\pi - 2\arctan 0.5) - \frac{r^2}{2} \left(\frac{4}{5}\right) \\
&= \frac{r^2 \pi}{2} - r^2 \arctan 0.5 - \frac{4r^2}{10} \\
&= \frac{r^2 \pi}{2} - r^2 \arctan 0.5 - \frac{2r^2}{5}
\end{aligned}$$

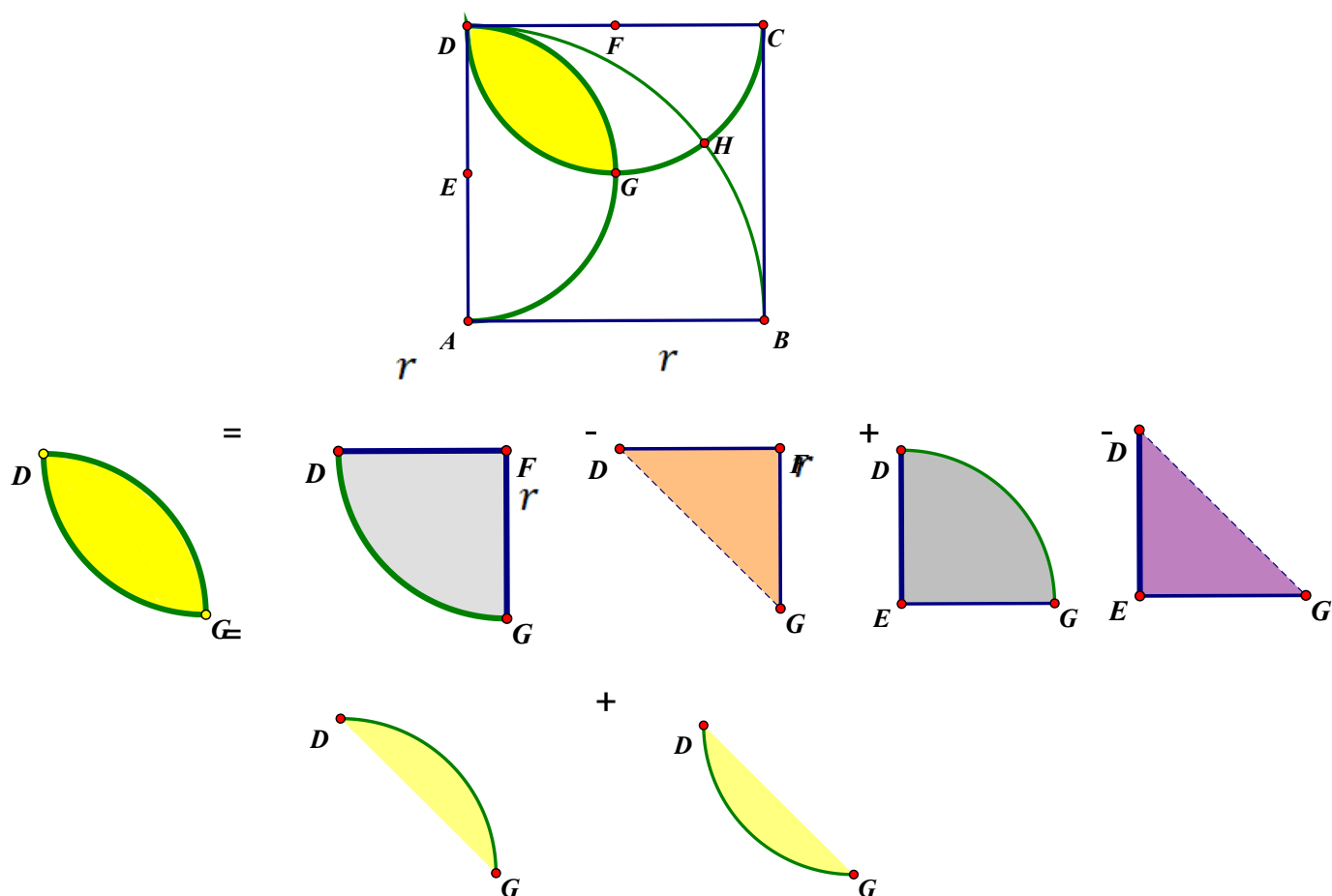
หมายเหตุ $\theta = \arctan(0.5)$

$$\sin(\pi - 2\theta) = \sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta = \frac{4}{5}$$



$$\begin{aligned}
\text{พื้นที่แรเงาสีน้ำตาล} &= \left(4r^2(\arctan 0.5) - \frac{8r^2}{5}\right) + \left(\frac{r^2 \pi}{2} - r^2 \arctan 0.5 - \frac{2r^2}{5}\right) \\
&= 3r^2(\arctan 0.5) - 2r^2 + \frac{r^2 \pi}{2}
\end{aligned}$$

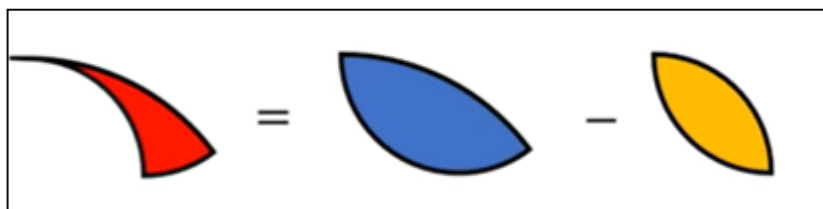
4.2 การหาพื้นที่แรเงาส่วนโค้งสีเหลือง



ภาพที่ 9 การหาพื้นที่แรเงาส่วนโค้งในวงกลมสีเหลืองโดยการใช้รูปเรขาคณิต

$$\begin{aligned}
 \text{พื้นที่แรเงาส่วนโค้งสีเหลือง} &= 2 \left(\frac{\pi r^2}{4} - \frac{r^2}{2} \right) \\
 &= \frac{\pi r^2}{2} - r^2
 \end{aligned}$$

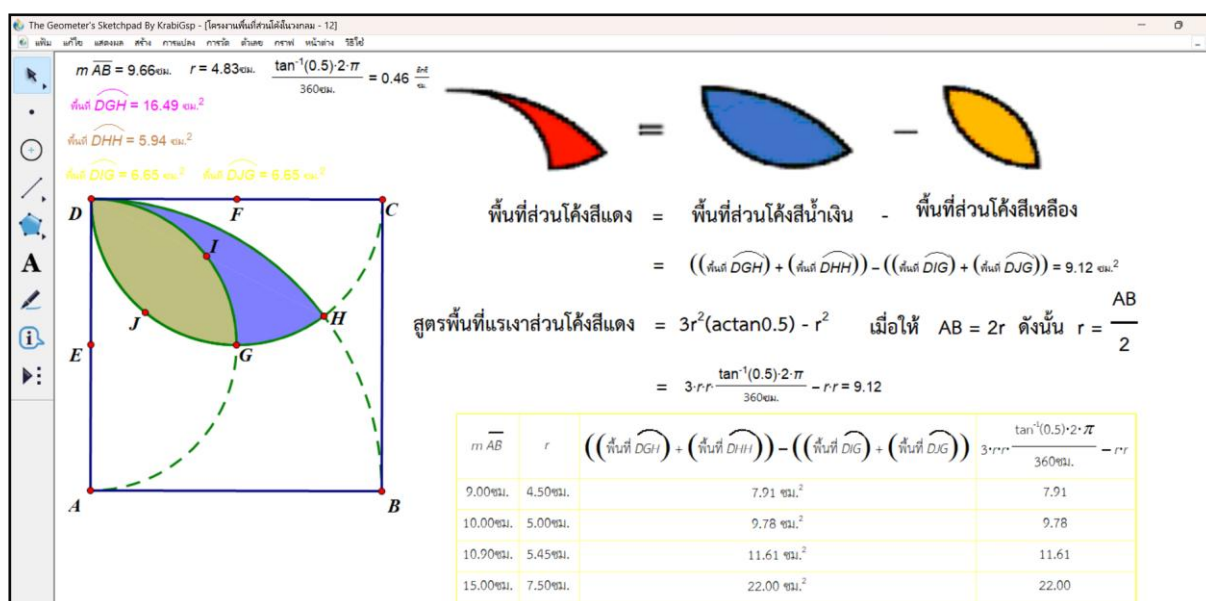
4.3 การหาพื้นที่ส่วนโค้งสีแดง



$$\begin{aligned}\text{พื้นที่ส่วนโค้งสีแดง} &= \left(3r^2(\arctan 0.5) - 2r^2 + \frac{r^2\pi}{10} \right) - \left(\frac{\pi r^2}{2} - r^2 \right) \\ &= 3r^2(\arctan 0.5) - r^2\end{aligned}$$

$$\text{สรุปสูตร พื้นที่ส่วนโค้งสีแดง} = 3r^2(\arctan 0.5) - r^2$$

5. ขั้นตอนการตรวจสอบพื้นที่แรเงาในส่วนโค้งของวงกลมด้วยโปรแกรม GSP กับสูตรที่คิดค้นได้



ภาพที่ 10 การตรวจสอบพื้นที่แรเงาในส่วนโค้งของวงกลมด้วยโปรแกรม GSP กับสูตรที่คิดค้นได้

จากภาพที่ 10 เมื่อกำหนดความยาวด้านสี่เหลี่ยมจัตุรัส มีความยาวด้าน AB จะทำให้ได้ $r = \frac{AB}{2}$ แทน r ในสูตรพื้นที่แรเงาส่วนโค้งสีแดงที่คิดค้นได้ เปรียบเทียบกับการหาพื้นที่แรเงาในส่วนโค้งของวงกลมด้วยโปรแกรม GSP พบว่า พื้นที่ที่ได้มีขนาดเท่ากัน

บทที่ 4 ผลการดำเนินการ

จากการที่คณะผู้จัดทำได้ดำเนินโครงการคณิตศาสตร์ ในครั้งนี้มีผลการดำเนินการดังนี้

ผลการดำเนินการ

1. การสร้างรูปพื้นที่แรเงาของส่วนโค้งที่ได้จากการสร้างทางเรขาคณิตด้วยโปรแกรม GSP สามารถสร้างด้วยการใช้สมบัติของรูปวงกลมทั้งหมดสามวงโดยรัศมีวงกลมรูปใหญ่เป็นความยาวเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลมรูปเล็กทั้งสอง จุดตัดของวงกลมทั้งสามวงทำให้เกิดพื้นที่ภายในส่วนโค้ง ที่จะเป็นพื้นที่ส่วนโค้งที่ต้องการคิดค้นหาสูตรในการหาพื้นที่ เมื่อทราบความยาวรัศมีของวงกลมวงใหญ่
2. การคิดค้นหาสูตรในการหาพื้นที่แรเงาในส่วนโค้งของวงกลม การใช้ความรู้ในการหาพื้นที่แรเงาส่วนโค้งในวงกลมโดยการใช้รูปเรขาคณิต ทำให้เห็นความสัมพันธ์ ที่เกี่ยวข้องกันของพื้นที่ส่วนโค้งในแต่ละส่วน และจากการพิสูจน์เพื่อนำไปสู่การคิดค้นหาสูตรในการหาพื้นที่แรเงา ต้องใช้ความรู้ทางตรีโกณมิติในการพิสูจน์จนทำให้เกิดสูตรในการหาพื้นที่เมื่อทราบความยาวเพียงด้านเดียวของรูปสี่เหลี่ยมจตุรัส และกำหนดให้ r เป็นครึ่งหนึ่งของความยาวด้านสี่เหลี่ยมจตุรัสที่กำหนดให้

$$\text{สรุปสูตร พื้นที่ส่วนโค้งสีแดง} = 3r^2(\arctan 0.5) - r^2$$

3. การตรวจสอบพื้นที่แรเงาในส่วนโค้งของวงกลมด้วยโปรแกรม GSP กับสูตรที่คิดค้นได้ พบว่ามีขนาดของพื้นที่แรเงาที่ต้องการ มีความยาวเท่ากันดังตารางต่อไปนี้

ความยาว AB	$r = \frac{AB}{2}$	พื้นที่แรเงาส่วนโค้งสีแดง	
		((พื้นที่ DGH) + (พื้นที่ DHH)) - ((พื้นที่ DIG) + (พื้นที่ DJG))	$3r^2(\arctan 0.5) - r^2$
9.00	4.50	7.91	7.91
10.00	5.00	9.78	9.78
10.90	5.45	11.61	11.61
15.00	7.50	22.00	22.00
19.00	9.50	35.27	35.27
20.08	10.04	39.42	39.42
25.00	12.50	61.10	61.10
9.66	4.83	9.12	9.12

ตารางที่ 2 แสดงการเปรียบเทียบพื้นที่แรเงาส่วนโค้งสีแดงโดยใช้โปรแกรม GSP กับการใช้สูตรที่คิดค้นขึ้น

บทที่ 5 สรุปผลการดำเนินการ / อภิปรายผลการดำเนินการ

จากการดำเนินการทำโครงการสามารถสรุปผลการดำเนินการ / อภิปรายผลการดำเนินการได้ดังนี้

สรุปผลการดำเนินการ

จากการใช้ โปรแกรมคณิตศาสตร์สำเร็จรูป The Geometer's Sketchpad หรือ GSP ความรู้พื้นฐานทางเรขาคณิต และความรู้ทางตรีโกณมิติ ในการหาพื้นที่แรงแจกส่วนโค้งที่สนใจ ทำให้คณะผู้จัดทำโครงการสามารถคิดค้นสูตรในการหาพื้นที่แรงแจกส่วนโค้งได้ เมื่อทราบความยาวด้านของสี่เหลี่ยมจัตุรัสเพียงด้านเดียว พร้อมทั้งสามารถใช้โปรแกรม GSP ในการตรวจสอบความถูกต้องของสูตรที่ได้ ด้วยการคำนวณจากเครื่องคำนวณในโปรแกรม GSP เปรียบเทียบกับการสำรวจพื้นที่ส่วนโค้งที่ต้องการจากความสัมพันธ์ของพื้นที่รูปเรขาคณิตในรูปที่สร้างขึ้น มีความสอดคล้องและผลลัพธ์ที่ได้เท่ากัน ทำให้ทราบว่าสูตรที่คิดค้นขึ้นสามารถหาพื้นที่ส่วนโค้งที่ต้องการได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์

อภิปรายผล

จากการสรุปผลการดำเนินการ การนำความรู้พื้นฐานทางเรขาคณิต มาใช้ในการสร้างรูปด้วยโปรแกรมคณิตศาสตร์สำเร็จรูป The Geometer's Sketchpad หรือ GSP และใช้ความรู้ทางตรีโกณมิติในการพิสูจน์ คิดค้นสูตรในการหาพื้นที่ของส่วนโค้งที่ต้องการ จากการจัดทำโครงการคณิตศาสตร์ในครั้งนี้ คณะผู้จัดทำโครงการสามารถอธิบายขั้นตอนการทำโดยใช้โปรแกรมคณิตศาสตร์สำเร็จรูป The Geometer's Sketchpad หรือ GSP แปลงนามธรรมให้เห็นเป็นรูปธรรมที่ชัดเจนมากยิ่งขึ้น ด้วยการเปรียบเทียบพื้นที่ที่ได้จากการสำรวจด้วยโปรแกรม GSP และจากการคำนวณด้วยเครื่องคำนวณในโปรแกรม ด้วยสูตรที่คิดค้นขึ้น ทำให้ได้แนวคิดในการนำความรู้ที่ได้ในการหาพื้นที่ส่วนโค้งในรูปแบบอื่น ๆ ได้ต่อไปในหลากหลายรูปแบบ พร้อมทั้งสามารถนำสูตรที่ได้ไปใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาในชีวิตประจำวัน หรือการทำแบบฝึกหัดและแบบทดสอบความรู้ในการหาพื้นที่แรงแจกในรูปแบบอื่น ๆ ได้อย่างหลากหลายต่อไป

ข้อเสนอแนะ

1. หาวิธีการหาพื้นที่ส่วนโค้งในรูปแบบต่าง ๆ ที่หลากหลายต่อไปได้ เพื่อให้ได้สูตรในการหาพื้นที่อื่นได้
2. นำความรู้ที่ได้ไปประยุกต์ใช้ในการสร้างรูปทางเรขาคณิตที่หลากหลาย
3. สร้างสรรค์งานศิลปะจากความรู้ที่ได้
4. ใช้ The Geometer's Sketchpad หรือ GSP สร้างรูปทางเรขาคณิตในรูปแบบต่าง ๆ ที่หลากหลายกว่านี้

บรรณานุกรม

กระทรวงศึกษาธิการ. (2560). **มาตรฐานการเรียนรู้และตัวชี้วัด กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์**

วิทยาศาสตร์ และสาระภูมิศาสตร์ ในกลุ่มสาระการเรียนรู้สังคมศึกษา ศาสนา และวัฒนธรรม
(ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551.

กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์ชุมนุมสหกรณ์การเกษตรแห่งประเทศไทย.

กรมวิชาการ กระทรวงศึกษาธิการ. (2551) **คู่มือจัดการเรียนรู้ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์.**

กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์องค์การรับส่งสินค้าและพัสดุภัณฑ์.

โครงการสารานุกรมไทยสำหรับเยาวชน โดยพระราชประสงค์ในพระบาทสมเด็จพระเจ้าอยู่หัว.(2551)

สารานุกรมไทยสำหรับเยาวชน เล่ม 6/ โครงการสารานุกรมไทยสำหรับเยาวชน โดยพระราช

ประสงค์ในพระบาทสมเด็จพระเจ้าอยู่หัว. กรุงเทพฯ: ด่านสุทธาการพิมพ์.

วิกิพีเดีย สารานุกรมเสรี. “**ตรีโกณมิติ**”. [ออนไลน์]. เข้าถึงได้จาก :

https://th.wikipedia.org/wiki/%E0%B8%95%E0%B8%A3%E0%B8%B5%E0%B9%82%E0%B8%81%E0%B8%93%E0%B8%A1%E0%B8%B4%E0%B8%95%E0%B8%B4#cite_note-1
1 (วันที่สืบค้นข้อมูล 8 สิงหาคม 2569)

Marucakporkaerm. “**โปรแกรม GSP**”. [ออนไลน์]. เข้าถึงได้จาก :

<https://sites.google.com/site/marucakporkaermgspkan/> (วันที่สืบค้นข้อมูล 8 สิงหาคม
สิงหาคม 2569)

TUTORFORYOU. “**ที่มาและความสำคัญ เรขาคณิตวิเคราะห์**”. [ออนไลน์]. เข้าถึงได้จาก :

<https://sites.google.com/site/mathforu277/prawati-rekhakhnitwikheraah> (วันที่
สืบค้นข้อมูล 8 สิงหาคม 2569)