



โครงการคณิตศาสตร์ประเภททฤษฎี ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น

เรื่อง การศึกษาทฤษฎีบทพีทาโกรัส วิธีพิสูจน์และการประยุกต์ใช้ทางคณิตศาสตร์

(A Study of the Pythagorean Theorem: Proofs and Mathematical Applications)

ผู้จัดทำโครงการ

1. เด็กชายกาลเวลา พัทวงษ์
2. เด็กหญิงเมธาพร เจริญพร
3. เด็กหญิงปัญญปัญญา สุคันธกาญจน์

อาจารย์ที่ปรึกษา

1. นางสาวปานทิพย์ เผาะช่วย
2. ดร.เบญจมา มีถาวร

โรงเรียน มอ. วิทยานุสรณ์ สุราษฎร์ธานี

พ.ศ. 2569

บทคัดย่อ

โครงการคณิตศาสตร์ประเภททฤษฎี เรื่อง การศึกษาทฤษฎีบทพีทาโกรัส วิธีพิสูจน์และการประยุกต์ใช้ทางคณิตศาสตร์ มีวัตถุประสงค์เพื่อ (1) ศึกษาความเป็นมาและหลักการของทฤษฎีบทพีทาโกรัส (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.), 2563) (2) ศึกษาและเปรียบเทียบวิธีพิสูจน์ทฤษฎีบทพีทาโกรัสในรูปแบบต่าง ๆ (สสวท., 2563; กระทรวงศึกษาธิการ, 2560) (3) วิเคราะห์การประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทพีทาโกรัสในด้านคณิตศาสตร์และศาสตร์สาขาอื่น (สสวท., 2563) และ (4) เพื่อสังเคราะห์องค์ความรู้เกี่ยวกับทฤษฎีบทพีทาโกรัสและแสดงให้เห็นถึงความสำคัญของการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์

การดำเนินโครงการใช้วิธีการศึกษาค้นคว้าจากหนังสือ ตำรา เอกสารทางวิชาการ และแหล่งข้อมูลที่น่าเชื่อถือ จากนั้นนำข้อมูลมาวิเคราะห์ เปรียบเทียบ และสังเคราะห์องค์ความรู้เกี่ยวกับทฤษฎีบทพีทาโกรัส (สสวท., 2563) โดยศึกษาวิธีพิสูจน์ที่สำคัญจำนวน 5 วิธี ได้แก่ การพิสูจน์โดยใช้พื้นที่ของสี่เหลี่ยมจัตุรัส การพิสูจน์โดยใช้ความคล้ายของสามเหลี่ยม การพิสูจน์โดยการจัดเรียงรูปเรขาคณิต การพิสูจน์โดยใช้เรขาคณิตวิเคราะห์ และการพิสูจน์โดยใช้เวกเตอร์ (สสวท., 2563; กระทรวงศึกษาธิการ, 2560) พร้อมทั้งวิเคราะห์ข้อดี ข้อจำกัด และความเหมาะสมของแต่ละวิธี รวมถึงศึกษาตัวอย่างการประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทพีทาโกรัสในการคำนวณระยะทาง การหาความสูง การออกแบบโครงสร้างทางวิศวกรรม งานสถาปัตยกรรม ระบบกำหนดตำแหน่งบนโลก (GPS) และคอมพิวเตอร์กราฟิก (สสวท., 2563)

ผลการศึกษาพบว่า ทฤษฎีบทพีทาโกรัสเป็นทฤษฎีบทพื้นฐานที่มีความสำคัญต่อการศึกษาคณิตศาสตร์ และสามารถพิสูจน์ได้หลายวิธี โดยแต่ละวิธีอาศัยแนวคิดทางคณิตศาสตร์ที่แตกต่างกัน ทั้งด้านเรขาคณิต พีชคณิต และเรขาคณิตวิเคราะห์ (สสวท., 2563) จากการเปรียบเทียบพบว่า วิธีพิสูจน์โดยใช้พื้นที่ของสี่เหลี่ยมจัตุรัสและวิธีพิสูจน์โดยใช้ความคล้ายของสามเหลี่ยมมีความเหมาะสมสำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้น เนื่องจากสามารถอธิบายได้อย่างเป็นลำดับขั้นและสอดคล้องกับเนื้อหาในหลักสูตร (สสวท., 2563) นอกจากนี้ยังพบว่า ทฤษฎีบทพีทาโกรัสเป็นพื้นฐานขององค์ความรู้ทางคณิตศาสตร์หลายแขนง และสามารถนำไปประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหาในชีวิตประจำวัน ตลอดจนการพัฒนาเทคโนโลยีและนวัตกรรมในหลากหลายสาขา (สสวท., 2563)

จากผลการศึกษาสามารถสรุปได้ว่า การศึกษาทฤษฎีบทพีทาโกรัสไม่เพียงช่วยให้เกิดความเข้าใจในหลักการและเหตุผลทางคณิตศาสตร์เท่านั้น แต่ยังส่งเสริมการคิดวิเคราะห์ การให้เหตุผล และการเชื่อมโยงองค์ความรู้ไปสู่การประยุกต์ใช้ในสถานการณ์จริง อันเป็นพื้นฐานสำคัญของการเรียนรู้คณิตศาสตร์ในระดับที่สูงขึ้น (สสวท., 2563; กระทรวงศึกษาธิการ, 2560)

คำสำคัญ: ทฤษฎีบทพีทาโกรัส, วิธีพิสูจน์, เรขาคณิต, การประยุกต์ใช้ทางคณิตศาสตร์, โครงการคณิตศาสตร์ประเภททฤษฎี

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของโครงการ

คณิตศาสตร์เป็นศาสตร์พื้นฐานที่มีบทบาทสำคัญต่อการพัฒนาความคิดอย่างมีเหตุผล การแก้ปัญหาอย่างเป็นระบบ และการประยุกต์ใช้ในศาสตร์แขนงต่าง ๆ เช่น วิทยาศาสตร์ วิศวกรรมศาสตร์ สถาปัตยกรรม เทคโนโลยีสารสนเทศ และการดำรงชีวิตประจำวัน (กระทรวงศึกษาธิการ, 2560; สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.), 2563) ความรู้ทางคณิตศาสตร์จำนวนมากเกิดจากการสังเกต การค้นหารูปแบบ การตั้งข้อสันนิษฐาน และการพิสูจน์อย่างเป็นเหตุเป็นผล ซึ่งช่วยให้ได้องค์ความรู้ที่ถูกต้องและสามารถนำไปใช้ประโยชน์ได้อย่างกว้างขวาง ทฤษฎีบทพีทาโกรัส (Pythagorean Theorem) เป็นหนึ่งในทฤษฎีบทที่มีชื่อเสียงและมีความสำคัญมากที่สุดในวิชาเรขาคณิต โดยกล่าวว่า ในสามเหลี่ยมมุมฉาก ผลบวกของกำลังสองของด้านประกอบมุมฉากทั้งสองด้าน เท่ากับกำลังสองของด้านตรงข้ามมุมฉาก สามารถเขียนเป็นสมการได้ว่า

$$a^2 + b^2 = c^2$$

ทฤษฎีบทนี้ได้รับการตั้งชื่อตามพีทาโกรัส นักปราชญ์และนักคณิตศาสตร์ชาวกรีก แม้ว่าหลักฐานทางประวัติศาสตร์จะพบว่ามีการใช้ความสัมพันธ์ดังกล่าวในอารยธรรมบาบิโลนและอียิปต์โบราณมาก่อนก็ตาม (Boyer & Merzbach, 2011) ความสำคัญของทฤษฎีบทพีทาโกรัสไม่ได้อยู่เพียงการใช้คำนวณความยาวด้านของสามเหลี่ยมมุมฉากเท่านั้น แต่ยังเป็นรากฐานขององค์ความรู้ทางเรขาคณิต เรขาคณิตวิเคราะห์ ตรีโกณมิติ และคณิตศาสตร์ระดับสูง อีกทั้งยังมีบทบาทสำคัญในการพัฒนาเทคโนโลยีสมัยใหม่ เช่น ระบบกำหนดตำแหน่งบนโลก (GPS) การออกแบบโครงสร้างทางวิศวกรรม การสร้างแบบจำลองด้วยคอมพิวเตอร์ และการเขียนโปรแกรมด้านกราฟิก (Stewart, 2016)

จากการศึกษาพบว่า ทฤษฎีบทพีทาโกรัสสามารถพิสูจน์ได้มากกว่า 300 วิธี โดยทฤษฎีบทพีทาโกรัสมีวิธีพิสูจน์เป็นจำนวนมาก โดย Loomis ได้รวบรวมวิธีพิสูจน์ไว้ถึง 370 แบบ (จินดิษฐ์ ละออปักชิน และสมภพ วัชฤทธิ์, 2566) โดยแต่ละวิธีใช้หลักการทางคณิตศาสตร์ที่แตกต่างกัน ทั้งด้านเรขาคณิต พีชคณิต และเรขาคณิตวิเคราะห์ การศึกษาวิธีพิสูจน์ที่หลากหลายช่วยให้ผู้เรียนเข้าใจว่าความจริงทางคณิตศาสตร์สามารถอธิบายได้ด้วยเหตุผลหลายรูปแบบ และช่วยพัฒนาทักษะการคิดวิเคราะห์ การให้เหตุผล และการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์

คณะผู้จัดทำจึงมีความสนใจศึกษาทฤษฎีบทพีทาโกรัส โดยมุ่งเน้นการศึกษาความเป็นมา หลักการ วิธีพิสูจน์ และการประยุกต์ใช้ในด้านต่าง ๆ พร้อมทั้งเปรียบเทียบวิธีพิสูจน์แต่ละวิธี วิเคราะห์ข้อดีและข้อจำกัด รวมถึงยกตัวอย่างการประยุกต์ใช้ในสถานการณ์จริง เพื่อแสดงให้เห็นถึงคุณค่าและความสำคัญของทฤษฎีบทพีทาโกรัสในฐานะองค์ความรู้พื้นฐานที่มีบทบาทสำคัญต่อการศึกษาคณิตศาสตร์และการพัฒนาวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีในปัจจุบัน

1.2 วัตถุประสงค์ของโครงการ

1. เพื่อศึกษาความเป็นมาและหลักการของทฤษฎีบทพีทาโกรัส
2. เพื่อศึกษาวิธีพิสูจน์ทฤษฎีบทพีทาโกรัสในรูปแบบต่าง ๆ และเปรียบเทียบข้อดี ข้อจำกัด และความเหมาะสมของแต่ละวิธี
3. เพื่อศึกษาการประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทพีทาโกรัสในคณิตศาสตร์และศาสตร์สาขาอื่น
4. เพื่อสังเคราะห์องค์ความรู้เกี่ยวกับทฤษฎีบทพีทาโกรัสและแสดงให้เห็นถึงความสำคัญของการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์

1.3 ขอบเขตของการศึกษา

การศึกษานี้เป็นโครงการคณิตศาสตร์ประเภททฤษฎี โดยกำหนดขอบเขตของการศึกษา ดังนี้

1.3.1 ด้านเนื้อหา ศึกษาประเด็นต่อไปนี้

1. ความเป็นมาและประวัติของทฤษฎีบทพีทาโกรัส
2. หลักการและสมการของทฤษฎีบทพีทาโกรัส
3. วิธีพิสูจน์ทฤษฎีบทพีทาโกรัส จำนวน 5 วิธี ได้แก่ การพิสูจน์โดยใช้พื้นที่ของสี่เหลี่ยมจัตุรัส การพิสูจน์โดยใช้ความคล้ายของสามเหลี่ยม การพิสูจน์โดยการจัดเรียงรูปเรขาคณิต การพิสูจน์โดยใช้เรขาคณิตวิเคราะห์ การพิสูจน์โดยใช้เวกเตอร์
4. การเปรียบเทียบข้อดี ข้อจำกัด และความเหมาะสมของแต่ละวิธี
5. การประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทพีทาโกรัสในด้านต่าง ๆ

1.3.2 แหล่งข้อมูล

ศึกษาจากหนังสือเรียนคณิตศาสตร์ ตำราทางวิชาการ บทความวิจัย เอกสารอ้างอิง และแหล่งข้อมูลอิเล็กทรอนิกส์ที่มีความน่าเชื่อถือ

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. ได้รับความรู้และความเข้าใจเกี่ยวกับทฤษฎีบทพีทาโกรัสและหลักการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์
2. เข้าใจความแตกต่างของวิธีพิสูจน์แต่ละรูปแบบ และสามารถเลือกใช้ได้อย่างเหมาะสม
3. เห็นความเชื่อมโยงของทฤษฎีบทพีทาโกรัสกับองค์ความรู้ทางคณิตศาสตร์และศาสตร์แขนงอื่น
4. สามารถนำความรู้ที่ได้ไปประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์และสถานการณ์ในชีวิตประจำวัน
5. พัฒนาทักษะการคิดวิเคราะห์ การให้เหตุผล และการสังเคราะห์องค์ความรู้ทางคณิตศาสตร์

บทที่ 2

เอกสารและทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

เพื่อให้การศึกษาทฤษฎีบทพีทาโกรัส วิธีพิสูจน์ และการประยุกต์ใช้ทางคณิตศาสตร์เป็นไปอย่างมีหลักการ ผู้จัดทำได้ศึกษาเอกสาร หนังสือ ตำรา และงานวิชาการที่เกี่ยวข้อง โดยแบ่งการศึกษาออกเป็นหัวข้อต่าง ๆ ดังนี้

2.1 ประวัติความเป็นมาของพีทาโกรัส พีทาโกรัส (Pythagoras) เป็นนักคณิตศาสตร์ นักปรัชญา และนักปราชญ์ชาวกรีกโบราณ ผู้ได้รับการยกย่องว่าเป็นบุคคลสำคัญคนหนึ่งในประวัติศาสตร์คณิตศาสตร์ สันนิษฐานว่าเกิดประมาณ 570 ปีก่อนคริสตกาล ณ เกาะซามอส (Samos) ประเทศกรีซ และเสียชีวิตประมาณ 495 ปีก่อนคริสตกาล ที่เมืองเมตาพอนทัม (Metapontum) ทางตอนใต้ของประเทศอิตาลีในปัจจุบัน (บุญมี พันธุ์ไทย, 2558)

ในช่วงวัยหนุ่ม พีทาโกรัสได้เดินทางศึกษาหาความรู้ในหลายอารยธรรม ได้แก่ อียิปต์ บาบิโลน และอาจรวมถึงดินแดนตะวันออกบางแห่ง เพื่อศึกษาคณิตศาสตร์ ดาราศาสตร์ เรขาคณิต และปรัชญา ความรู้ที่ได้รับจากการเดินทางเหล่านี้ส่งผลให้พีทาโกรัสสามารถพัฒนาแนวคิดทางคณิตศาสตร์และปรัชญาที่มีอิทธิพลต่อโลกตะวันตกในเวลาต่อมา (สมาน แสงทองอร่าม, 2556)

ภายหลัง พีทาโกรัสได้ก่อตั้งสำนักพีทาโกรัส (Pythagorean School) ที่เมืองโครตอน (Croton) ทางตอนใต้ของอิตาลี ซึ่งเป็นทั้งสถาบันการศึกษาและชุมชนที่ศึกษาเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ ดนตรี ดาราศาสตร์ และปรัชญา สมาชิกของสำนักเชื่อว่า "จำนวนเป็นรากฐานของสรรพสิ่ง" (All things are numbers) และเชื่อว่าปรากฏการณ์ต่าง ๆ ในธรรมชาติสามารถอธิบายได้ด้วยหลักคณิตศาสตร์ (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.), 2563)

ผลงานที่มีชื่อเสียงที่สุดของพีทาโกรัส คือ ทฤษฎีบทพีทาโกรัส ซึ่งกล่าวว่า ในสามเหลี่ยมมุมฉาก ผลบวกของกำลังสองของด้านประกอบมุมฉากทั้งสองด้าน เท่ากับกำลังสองของด้านตรงข้ามมุมฉาก หรือเขียนเป็นสมการได้ว่า

$$a^2 + b^2 = c^2$$

แม้ว่าทฤษฎีบทดังกล่าวจะได้รับการตั้งชื่อตามพีทาโกรัส แต่จากหลักฐานทางประวัติศาสตร์พบว่า ชาวบาบิโลนและชาวอียิปต์โบราณรู้จักความสัมพันธ์ของด้านในสามเหลี่ยมมุมฉากก่อนยุคของพีทาโกรัสหลายร้อยปี อย่างไรก็ตาม พีทาโกรัสหรือสำนักพีทาโกรัสเป็นผู้ที่นำความรู้นี้มาพัฒนาและพิสูจน์อย่างเป็นระบบ จนกลายเป็นทฤษฎีบททางคณิตศาสตร์ที่ได้รับการยอมรับและใช้มาจนถึงปัจจุบัน (ศิริชัย กาญจนวาสี, 2559; สสวท., 2563)

นอกจากทฤษฎีบทพีทาโกรัสแล้ว สำนักพีทาโกรัสยังมีบทบาทสำคัญในการพัฒนาแนวคิดเกี่ยวกับจำนวนตรรกยะ จำนวนอตรรกยะ ความสัมพันธ์ของอัตราส่วนทางดนตรี และแนวคิดด้านเรขาคณิต ซึ่งล้วนเป็นรากฐานสำคัญของการศึกษาคณิตศาสตร์ในยุคต่อมา (บุญมี พันธุ์ไทย, 2558)

ในปัจจุบัน ทฤษฎีบทพีทาโกรัสยังคงเป็นเนื้อหาสำคัญในหลักสูตรคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษา และเป็นพื้นฐานของการศึกษาวิชาเรขาคณิต ตรรกศาสตร์ เรขาคณิตวิเคราะห์ ตลอดจนการประยุกต์ใช้ในวิศวกรรมศาสตร์ สถาปัตยกรรม ระบบสารสนเทศภูมิศาสตร์ (GIS) ระบบกำหนดตำแหน่งบนโลก (GPS) และคอมพิวเตอร์กราฟิก (สสวท., 2563)

2.2 ความหมายของทฤษฎีบทพีทาโกรัส ทฤษฎีบทพีทาโกรัส (Pythagorean Theorem) เป็นทฤษฎีบทพื้นฐานทางเรขาคณิตที่ใช้อธิบายความสัมพันธ์ระหว่างความยาวของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยระบุว่า ในรูปสามเหลี่ยมมุมฉากใด ๆ กำลังสองของความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก มีค่าเท่ากับผลบวกของกำลังสองของความยาวด้านประกอบมุมฉากทั้งสองด้าน (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี [สสวท.], 2563) ทฤษฎีบทนี้ถือเป็นหนึ่งในทฤษฎีบทที่สำคัญที่สุดของวิชาเรขาคณิต และเป็นพื้นฐานของการศึกษาทางคณิตศาสตร์ในระดับที่สูงขึ้น รวมทั้งการประยุกต์ใช้ในศาสตร์แขนงต่าง ๆ เช่น วิทยาศาสตร์ วิศวกรรมศาสตร์ สถาปัตยกรรม และเทคโนโลยี (กระทรวงศึกษาธิการ, 2560)

หากกำหนดให้รูปสามเหลี่ยมมุมฉากมีด้านประกอบมุมฉากยาว (a) และ (b) และด้านตรงข้ามมุมฉากยาว (c) จะได้ความสัมพันธ์ดังสมการ

$$a^2 + b^2 = c^2$$

โดยที่ (c) เป็นด้านที่ยาวที่สุดของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก สมการนี้เรียกว่า สมการพีทาโกรัส ซึ่งใช้ในการคำนวณหาความยาวของด้านที่ไม่ทราบค่า และใช้ตรวจสอบความเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากได้อีกด้วย (สสวท., 2563)

ตามหนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ของสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี ได้อธิบายว่าทฤษฎีบทพีทาโกรัสเป็นความสัมพันธ์ที่ใช้เฉพาะกับรูปสามเหลี่ยมมุมฉากเท่านั้น และเป็นพื้นฐานสำคัญของการเรียนรู้เรื่องบทกลับของทฤษฎีบทพีทาโกรัส การหาระยะทาง การคำนวณพื้นที่ ตลอดจนการศึกษาวิชาเรขาคณิตวิเคราะห์และตรรกศาสตร์ในระดับที่สูงขึ้น (สสวท., 2563)

นอกจากนี้ ทฤษฎีบทพีทาโกรัสยังสะท้อนให้เห็นถึงกระบวนการให้เหตุผลและการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นทักษะสำคัญตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พ.ศ. 2551 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) ที่มุ่งพัฒนาผู้เรียนให้สามารถคิดวิเคราะห์ แก้ปัญหา และเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์กับสถานการณ์ในชีวิตจริงได้อย่างมีเหตุผล (กระทรวงศึกษาธิการ, 2560)

2.3 หลักการของทฤษฎีบทพีทาโกรัส ทฤษฎีบทพีทาโกรัสเป็นทฤษฎีบทพื้นฐานทางเรขาคณิตที่อธิบาย

ความสัมพันธ์ระหว่างความยาวของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยมีหลักการสำคัญว่า ในรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ผลบวกของกำลังสองของความยาวด้านประกอบมุมฉากทั้งสองด้าน จะมีค่าเท่ากับกำลังสองของความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก ซึ่งสามารถเขียนเป็นสมการได้ ดังนี้ (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.), 2563)

$$a^2 + b^2 = c^2$$

เมื่อ a และ b แทนความยาวของด้านประกอบมุมฉาก

c แทนความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก (ด้านยาวที่สุด)

หลักการของทฤษฎีบทพีทาโกรัสสามารถอธิบายได้จากแนวคิดเรื่อง พื้นที่ของสี่เหลี่ยมจัตุรัส ที่สร้างบนด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก กล่าวคือ หากสร้างสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านแต่ละด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก จะพบว่าพื้นที่ของสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่สร้างบนด้านตรงข้ามมุมฉาก มีค่าเท่ากับผลรวมของพื้นที่ของสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่สร้างบนด้านประกอบมุมฉากทั้งสองด้าน (สสวท., 2563)

ตัวอย่างเช่น หากรูปสามเหลี่ยมมุมฉากมีด้านประกอบมุมฉากยาว 3 หน่วย และ 4 หน่วย จะได้พื้นที่ของสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านทั้งสองเท่ากับ $3^2 = 9$ และ $4^2 = 16$ ดังนั้นผลรวมของพื้นที่ทั้งสองคือ 25 ซึ่งเท่ากับพื้นที่ของสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านตรงข้ามมุมฉาก หรือ $5^2 = 25$ แสดงให้เห็นว่ารูปสามเหลี่ยมดังกล่าวเป็นไปตามทฤษฎีบทพีทาโกรัส

นอกจากการใช้หาความยาวของด้านที่ไม่ทราบค่าแล้ว หลักการของทฤษฎีบทพีทาโกรัสยังสามารถนำมาใช้ตรวจสอบว่ารูปสามเหลี่ยมที่กำหนดเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากหรือไม่ ซึ่งเรียกว่า บทกลับของทฤษฎีบทพีทาโกรัส โดยถ้ารูปสามเหลี่ยมที่มีด้านยาว a , b และ c เมื่อ c เป็นด้านที่ยาวที่สุด มีความสัมพันธ์เป็น $a^2 + b^2 = c^2$ แล้ว รูปสามเหลี่ยมนั้นจะเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก (สสวท., 2563)

ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) ทฤษฎีบทพีทาโกรัสเป็นสาระสำคัญในสาระการเรียนรู้เรขาคณิต โดยมุ่งให้ผู้เรียนสามารถอธิบายความสัมพันธ์ของด้านในรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ใช้ทฤษฎีบทพีทาโกรัสและบทกลับในการแก้ปัญหา ตลอดจนเชื่อมโยงความรู้ไปสู่การศึกษาคณิตศาสตร์ขั้นสูง เรขาคณิตวิเคราะห์ และการประยุกต์ใช้ในชีวิตประจำวัน (กระทรวงศึกษาธิการ, 2560)

หลักการของทฤษฎีบทพีทาโกรัสจึงไม่เพียงเป็นเครื่องมือในการคำนวณทางเรขาคณิตเท่านั้น แต่ยังเป็นพื้นฐานของการให้เหตุผล การพิสูจน์ และการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ซึ่งสามารถนำไปประยุกต์ใช้ในงานด้านวิศวกรรมศาสตร์ สถาปัตยกรรม การสำรวจ การสร้างแผนที่ ระบบกำหนดตำแหน่งบนโลก (GPS) และการพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์ด้านกราฟิกได้อย่างกว้างขวาง (สสวท., 2563)

2.4 จำนวนพีทาโกรัส (Pythagorean Triple) จำนวนพีทาโกรัส (Pythagorean Triple) หมายถึง ชุดของจำนวนเต็มบวก 3 จำนวน ที่สอดคล้องกับทฤษฎีบทพีทาโกรัส กล่าวคือ หากกำหนดให้จำนวนทั้งสามเป็น (a), (b) และ (c) โดยที่ (c) เป็นจำนวนที่มีค่ามากที่สุด จะต้องเป็นไปตามความสัมพันธ์

$$a^2 + b^2 = c^2$$

เมื่อใช้จำนวนทั้งสามเป็นความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยม จะได้รูปสามเหลี่ยมมุมฉากเสมอ (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.), 2563)

ตัวอย่างของจำนวนพีทาโกรัสที่พบได้บ่อย ได้แก่

- (3, 4, 5) เนื่องจาก $(3^2 + 4^2 = 5^2)$
- (5, 12, 13) เนื่องจาก $(5^2 + 12^2 = 13^2)$
- (8, 15, 17)
- (7, 24, 25)
- (20, 21, 29)

จำนวนพีทาโกรัสเหล่านี้เป็นตัวอย่างที่นิยมใช้ในการเรียนการสอนเรื่องทฤษฎีบทพีทาโกรัส เนื่องจากช่วยให้ผู้เรียนสามารถตรวจสอบความสัมพันธ์ของด้านในรูปสามเหลี่ยมมุมฉากได้อย่างสะดวก และสามารถนำไปประยุกต์ใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาทางเรขาคณิตได้ (สสวท., 2563)

ในทางคณิตศาสตร์ จำนวนพีทาโกรัสสามารถแบ่งออกเป็น 2 ประเภท ได้แก่

จำนวนพีทาโกรัสมูลฐาน (Primitive Pythagorean Triple) คือ ชุดจำนวนที่ตัวเลขทั้งสามไม่มีตัวหารร่วมมากกว่า 1 เช่น (3, 4, 5), (5, 12, 13) และ (8, 15, 17)

จำนวนพีทาโกรัสไม่มูลฐาน (Non-primitive Pythagorean Triple) คือ ชุดจำนวนที่เกิดจากการนำจำนวนพีทาโกรัสมูลฐานคูณด้วยจำนวนเต็มบวก เช่น (6, 8, 10) ซึ่งเกิดจาก (3, 4, 5) คูณด้วย 2 หรือ (9, 12, 15) ซึ่งเกิดจาก (3, 4, 5) คูณด้วย 3 (บุญมี พันธุ์ไทย, 2558) นอกจากนี้ นักคณิตศาสตร์ชาวกรีกชื่อ ยูคลิด (Euclid) ได้แสดงวิธีสร้างจำนวนพีทาโกรัสมูลฐานด้วยสูตรที่เรียกว่า สูตรของยูคลิด (Euclid's Formula) จะได้การสร้างจำนวนพีทาโกรัสมูลฐานด้วยสูตรของยูคลิด (Euclid's Formula) ยูคลิด ได้ค้นพบวิธีสร้างจำนวนพีทาโกรัสมูลฐาน (Primitive Pythagorean Triple) จากนั้นคำนวณค่าของด้านทั้งสามด้วยสูตร ดังนี้

$$a = m^2 - n^2$$

$$b = 2mn$$

$$c = m^2 + n^2$$

เมื่อ m และ n เป็นจำนวนเต็มบวกที่มีเงื่อนไข คือ $m > n$ โดยตัวหารร่วมมาก (ห.ร.ม.) ของ m และ $n = 1$ และหนึ่งจำนวนเป็นจำนวนคู่ อีกหนึ่งจำนวนเป็นจำนวนคี่

เมื่อแทนค่าแล้ว จำนวนทั้งสาม (a, b, c) จะเป็นจำนวนพีทาโกรัสมูลฐาน ซึ่งสอดคล้องกับสมการ

$$a^2 + b^2 = c^2$$

ตัวอย่างที่ 1 $m = 2$ และ $n = 1$ จากสูตรคำนวณได้

$$a = 2^2 - 1^2 = 3$$

$$b = 2(2)(1) = 4$$

$$c = 2^2 + 1^2 = 5$$

ดังนั้นได้จำนวนพีทาโกรัส (3, 4, 5)

ตรวจสอบ $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$ จึงเป็นจำนวนพีทาโกรัสมูลฐาน

ตัวอย่างที่ 2 $m = 3$ และ $n = 2$ จากสูตรคำนวณได้

$$a = 3^2 - 2^2 = 5$$

$$b = 2(3)(2) = 12$$

$$c = 3^2 + 2^2 = 13$$

ดังนั้นได้จำนวนพีทาโกรัส (5, 12, 13)

ตรวจสอบ $5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2$ จึงเป็นจำนวนพีทาโกรัสมูลฐาน

ตัวอย่างที่ 3 $m = 4$ และ $n = 1$ จากสูตรคำนวณได้

$$a = 4^2 - 1^2 = 15$$

$$b = 2(4)(1) = 8$$

$$c = 4^2 + 1^2 = 17$$

ดังนั้นได้จำนวนพีทาโกรัส (8, 15, 17)

ตรวจสอบ $8^2 + 15^2 = 64 + 225 = 289 = 17^2$ จึงเป็นจำนวนพีทาโกรัสมูลฐาน

ตัวอย่างที่ 4 $m = 5$ และ $n = 2$ จากสูตรคำนวณได้

$$a = 5^2 - 2^2 = 21$$

$$b = 2(5)(2) = 20$$

$$c = 5^2 + 2^2 = 29$$

ดังนั้นได้จำนวนพีทาโกรัส (20, 21, 29)

ตรวจสอบ $20^2 + 21^2 = 400 + 441 = 841 = 29^2$ จึงเป็นจำนวนพีทาโกรัสมูลฐาน

จากตัวอย่างจะเห็นได้ว่า สูตรของยุคลิดสามารถใช้สร้างจำนวนพีทาโกรัสมูลฐานได้อย่างเป็นระบบ เพียงกำหนดค่า (m) และ (n) ให้เป็นไปตามเงื่อนไขที่กำหนด ก็จะได้ชุดจำนวนเต็มบวกสามจำนวนที่สอดคล้องกับทฤษฎีบทพีทาโกรัสทุกครั้ง สูตรนี้จึงเป็นพื้นฐานสำคัญของการศึกษาทฤษฎีจำนวนและเรขาคณิต และแสดงให้เห็นถึงความเชื่อมโยงระหว่างพีชคณิตกับเรขาคณิตได้อย่างชัดเจน (บุญมี พันธุ์ไทย, 2558) จึงได้จำนวนพีทาโกรัสชุด (3, 4, 5) ซึ่งเป็นจำนวนพีทาโกรัสมูลฐานชุดแรก (บุญมี พันธุ์ไทย, 2558)

จำนวนพีทาโกรัสมีความสำคัญทั้งในด้านทฤษฎีและการประยุกต์ใช้ เนื่องจากช่วยให้การคำนวณความยาวด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากทำได้สะดวกโดยไม่ต้องคำนวณค่ารากที่สอง อีกทั้งยังนำไปใช้ในการสำรวจและรังวัด การก่อสร้าง การออกแบบโครงสร้าง วิศวกรรมศาสตร์ สถาปัตยกรรม ตลอดจนการพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์ ด้านกราฟิกและระบบกำหนดตำแหน่งบนโลก (GPS) ซึ่งล้วนใช้หลักการของทฤษฎีบทพีทาโกรัสเป็นพื้นฐาน (กระทรวงศึกษาธิการ, 2560; สสวท., 2563)

จากการศึกษาพบว่า จำนวนพีทาโกรัสเป็นตัวอย่างที่แสดงให้เห็นความสัมพันธ์ระหว่างทฤษฎีจำนวนและเรขาคณิตได้อย่างชัดเจน และเป็นพื้นฐานสำคัญของการเรียนรู้เรื่องทฤษฎีบทพีทาโกรัส บทกลับของทฤษฎีบทพีทาโกรัส และการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ในระดับที่สูงขึ้น (สสวท., 2563)

2.5 วิธีพิสูจน์ทฤษฎีบทพีทาโกรัส

2.5.1 พิสูจน์โดยพื้นที่ (Proof by Area)

2.5.1.1 แนวคิดของการพิสูจน์โดยพื้นที่

การพิสูจน์โดยพื้นที่ (Proof by Area) เป็นวิธีพิสูจน์ทฤษฎีบทพีทาโกรัสที่ได้รับการยอมรับอย่างแพร่หลาย และเป็นวิธีที่เหมาะสมสำหรับผู้เรียนระดับมัธยมศึกษา เนื่องจากอาศัยแนวคิดพื้นฐานเกี่ยวกับพื้นที่ของรูปเรขาคณิต ซึ่งผู้เรียนสามารถมองเห็นความสัมพันธ์ได้อย่างเป็นรูปธรรม (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.), 2563) แนวคิดสำคัญของวิธีนี้ คือ พื้นที่ของสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่สร้างบนด้านตรงข้ามมุมฉาก มีค่าเท่ากับผลรวมของพื้นที่ของสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่สร้างบนด้านประกอบมุมฉากทั้งสองด้าน หากให้รูปสามเหลี่ยมมุมฉากมีด้านประกอบมุมฉากยาว (a) และ (b) และด้านตรงข้ามมุมฉากยาว (c) จะได้ความสัมพันธ์

$$a^2 + b^2 = c^2$$

2.5.1.2 ขั้นตอนการพิสูจน์โดยพื้นที่

ขั้นที่ 1 สร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉากกำหนดให้รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก (AB=a) (AC=b) และ (BC=c) โดยที่มุม A = 90 องศา

ขั้นที่ 2 สร้างสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านทั้งสามสร้างสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้าน (AB) สี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้าน (AC) และสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้าน (BC) จะได้พื้นที่ a^2 , b^2 , c^2 ตามลำดับ

ขั้นที่ 3 เปรียบเทียบพื้นที่จากการแบ่งพื้นที่ของรูปเรขาคณิตและอาศัยสมบัติของพื้นที่ จะพบว่าพื้นที่ของสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านตรงข้ามมุมฉาก มีค่าเท่ากับผลรวมของพื้นที่ของสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านประกอบมุมฉากทั้งสอง ดังนั้น $c^2 = a^2 + b^2$ จึงพิสูจน์ทฤษฎีบทพีทาโกรัสได้สมบูรณ์

2.5.1.3 ตัวอย่างการคำนวณ

กำหนดให้ $a = 3$, $b = 4$ พื้นที่ของสี่เหลี่ยมจัตุรัสแต่ละรูป คือ $3^2 = 9$ $4^2 = 16$ ผลรวมของพื้นที่ $9 + 16 = 25$ ดังนั้น $c^2 = 25$ จึงได้ $c=5$

ตรวจสอบ $3^2 + 4^2 = 5^2$

สมการเป็นจริง แสดงว่ารูปสามเหลี่ยมดังกล่าวเป็นไปตามทฤษฎีบทพีทาโกรัส

2.5.1.4 เหตุผลทางคณิตศาสตร์การพิสูจน์โดยพื้นที่ แสดงให้เห็นว่าความสัมพันธ์ของด้านทั้งสามไม่ได้เกิดจากการคำนวณเพียงอย่างเดียว แต่เกิดจากความสัมพันธ์ของพื้นที่ที่สามารถอธิบายได้ด้วยหลักเรขาคณิตเหตุผลสำคัญ ได้แก่

1. พื้นที่ของสี่เหลี่ยมจัตุรัสขึ้นอยู่กับกำลังสองของความยาวด้าน
2. การเปรียบเทียบพื้นที่เป็นการพิสูจน์ที่ไม่ขึ้นอยู่กับค่าตัวเลขเฉพาะกรณี แต่ใช้ได้กับรูปสามเหลี่ยมมุมฉากทุกขนาด
3. การพิสูจน์นี้อาศัยหลักการอนุรักษ์พื้นที่ กล่าวคือ การแบ่งหรือจัดพื้นที่ใหม่ไม่ทำให้พื้นที่รวมเปลี่ยนแปลงจึงถือเป็นการพิสูจน์ที่เป็นเหตุเป็นผลและเป็นสากล

2.5.1.5 ข้อดีของการพิสูจน์โดยพื้นที่

1. เข้าใจได้ง่าย เหมาะสำหรับผู้เรียนระดับมัธยมศึกษา
2. ใช้ความรู้พื้นฐานเรื่องพื้นที่ของสี่เหลี่ยมจัตุรัส
3. มองเห็นความสัมพันธ์ของสมการจากรูปเรขาคณิตโดยตรง
4. ส่งเสริมการคิดเชิงภาพ (Visual Reasoning)
5. สามารถนำไปพัฒนาเป็นสื่อการเรียนรู้หรือกิจกรรม Active Learning ได้

2.5.1.6 ข้อจำกัดของการพิสูจน์โดยพื้นที่

1. ใช้ได้เฉพาะรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก
2. ผู้เรียนต้องมีความเข้าใจเรื่องพื้นที่ของรูปเรขาคณิตก่อน
3. หากรูปประกอบไม่ถูกต้อง อาจทำให้ตีความความสัมพันธ์ของพื้นที่คลาดเคลื่อนได้
4. ไม่ได้แสดงความเชื่อมโยงกับแนวคิดพีชคณิตหรือเวกเตอร์โดยตรง จึงยังไม่ครอบคลุมมุมมองทางคณิตศาสตร์ในระดับสูง

2.5.1.7 สรุปการพิสูจน์โดยพื้นที่ เป็นวิธีพิสูจน์ที่ใช้หลักการทางเรขาคณิตในการแสดงให้เห็นว่าพื้นที่ของสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านตรงข้ามมุมฉากเท่ากับผลรวมของพื้นที่ของสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านประกอบมุมฉากทั้งสอง จึงสรุปได้ว่า

$$a^2 + b^2 = c^2$$

วิธีพิสูจน์นี้มีความเรียบง่าย เข้าใจง่าย และสอดคล้องกับการจัดการเรียนการสอนในระดับมัธยมศึกษา จึงเป็นหนึ่งในวิธีพิสูจน์ที่ได้รับความนิยมมากที่สุดในการศึกษาทฤษฎีบทพีทาโกรัส

2.5.2 การพิสูจน์วิธีนี้อาศัยสมบัติของรูปสามเหลี่ยมคล้าย

โดยลากเส้นตั้งฉากจากมุมฉากลงสู่ด้านตรงข้ามมุมฉาก ทำให้เกิดรูปสามเหลี่ยมมุมฉากขนาดเล็กสองรูป ซึ่งทั้งสองรูปจะคล้ายกับรูปสามเหลี่ยมเดิม และคล้ายกันเองจากอัตราส่วนของด้านที่สอดคล้องกัน สามารถสร้างสมการความสัมพันธ์ระหว่างความยาวด้านทั้งสาม จนได้ผลลัพธ์ว่า

$$a^2 + b^2 = c^2$$

ขั้นตอนการพิสูจน์

- ลากเส้นส่วนสูง: กำหนดให้สามเหลี่ยมมุมฉาก ABC มีมุม B เป็นมุมฉาก และด้านตรงข้ามมุมฉากคือ AC ลากเส้นตรงจากมุม B ลงมาตั้งฉากกับด้าน AC ที่จุด D
- เกิดสามเหลี่ยมคล้าย: ทำให้ได้รูปสามเหลี่ยมมุมฉากย่อย 2 รูป คือ สามเหลี่ยม ADB และ สามเหลี่ยม BDC ซึ่งทั้งสองรูปนี้มีมุมเท่ากันทุกมุมกับรูปสามเหลี่ยมใหญ่ สามเหลี่ยม ABC จึงเป็น สามเหลี่ยมคล้ายกัน (ตามสมบัติ มุม-มุม-มุม หรือ ม.ม.ม.)
- เทียบอัตราส่วนด้านที่สมนัยกัน จากความคล้ายจะได้สัดส่วน $\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AB}$ ซึ่งหมายความว่า $AB^2 = AC \times AD$ และจะได้สัดส่วน $\frac{BC}{AC} = \frac{DC}{BC}$ ซึ่งหมายความว่า $BC^2 = AC \times DC$

- รวมสมการ: นำสองสมการมาบวกกันจะได้

$$AB^2 + BC^2 = (AC \times AD) + (AC \times DC) = AC \times (AD + DC)$$

- สรุปผล: เนื่องจาก $AD + DC = AC$ ดังนั้น $AB^2 + BC^2 = AC \times AC = AC^2$ หรือ

$$a^2 + b^2 = c^2$$

การพิสูจน์โดยสามเหลี่ยมคล้ายแสดงให้เห็นถึงความเชื่อมโยงระหว่างแนวคิดเรื่องความคล้ายกับเรขาคณิตเชิงพีชคณิต อีกทั้งยังช่วยพัฒนาทักษะการให้เหตุผลเชิงคณิตศาสตร์ของผู้เรียน ซึ่งเป็นสมรรถนะสำคัญตามหลักสูตรคณิตศาสตร์ (สสวท., 2563; กระทรวงศึกษาธิการ, 2560)

2.5.3 พิสูจน์โดยการจัดเรียงรูป (Proof by Rearrangement)

การพิสูจน์โดยการจัดเรียงรูปเป็นวิธีที่อาศัยการเคลื่อนย้ายและจัดวางรูปเรขาคณิตใหม่ โดยใช้รูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่เท่ากันหลายรูปจัดเรียงภายในสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาดใหญ่ จากนั้นเปรียบเทียบพื้นที่ที่เหลือภายหลังการจัดเรียงในสองรูปแบบ การพิสูจน์ทฤษฎีบทพีทาโกรัส โดยการจัดเรียงรูป ทำได้โดยนำรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่เท่ากัน 4 รูป มาจัดวางในรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสใหญ่ 2 แบบ เพื่อเปรียบเทียบพื้นที่ว่างที่เหลือ ซึ่งจะแสดงให้เห็นความสัมพันธ์ระหว่างด้านทั้งสามได้อย่างชัดเจน

แม้ว่าการจัดวางของรูปเรขาคณิตจะแตกต่างกัน แต่พื้นที่รวมของสี่เหลี่ยมใหญ่ยังคงเท่าเดิม เมื่อนำพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมออกจากทั้งสองแบบ จะได้ความสัมพันธ์

$$a^2 + b^2 = c^2$$

วิธีพิสูจน์นี้ช่วยให้เห็นว่าทฤษฎีบทพีทาโกรัสสามารถอธิบายได้ผ่านการอนุรักษ์พื้นที่ และเป็นวิธีที่นิยมใช้ในการเรียนการสอน เนื่องจากสามารถนำเสนอด้วยภาพประกอบที่เข้าใจง่าย (สสวท., 2563)

ขั้นตอนการพิสูจน์

- กำหนดรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก 4 รูปที่เหมือนกันทุกประการ โดยให้ด้านประกอบมุมฉากยาว a และ b และด้านตรงข้ามมุมฉากยาว c
- แบบที่ 1:** จัดเรียงสามเหลี่ยมทั้ง 4 รูปไว้ **ริมขอบด้านใน** ของสี่เหลี่ยมจัตุรัสใหญ่ที่มีความยาวด้านละ $a + b$ ทำให้เกิดพื้นที่ว่างเป็น **รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสตรงกลาง** ที่มีความยาวด้านเท่ากับ c พื้นที่ว่างส่วนนี้จึงเท่ากับ c^2
- แบบที่ 2:** จัดเรียงสามเหลี่ยม 4 รูปเดิมใหม่ **ภายใน** สี่เหลี่ยมจัตุรัสใหญ่ขนาดเท่าเดิม $a + b$ แต่ขยับตำแหน่งใหม่ ทำให้พื้นที่ว่างที่เหลือถูกแบ่งออกเป็น **รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสสองรูป** ที่มีขนาดพื้นที่เท่ากับ a^2 และ b^2 ตามลำดับ
- สรุปผลการพิสูจน์เนื่องจากสี่เหลี่ยมจัตุรัสใหญ่ทั้งสองรูปมีพื้นที่เท่ากัน และเกิดจากการใช้รูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่เหมือนกัน 4 รูปเท่ากันพื้นที่ว่างที่เหลือในแบบที่ 1 c^2 จึงต้องเท่ากับผลรวมของพื้นที่ว่างที่เหลือในแบบที่ 2 $a^2 + b^2$ สรุปได้ว่า $c^2 = a^2 + b^2$

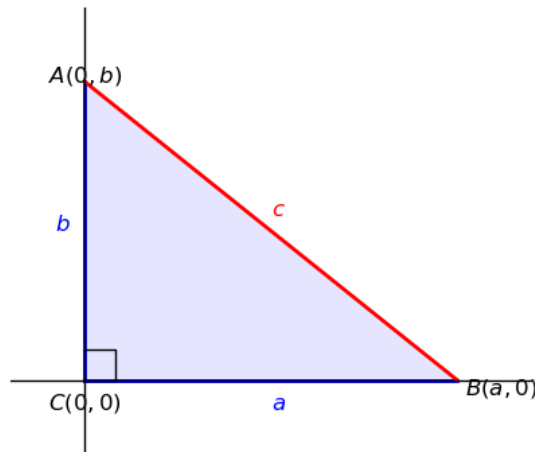
2.5.4 พิสูจน์โดยพิกัด (Proof by Coordinate Geometry)

การพิสูจน์โดยพิกัดเป็นการประยุกต์ใช้เรขาคณิตวิเคราะห์ โดยกำหนดตำแหน่งของจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากบนระบบพิกัดฉาก เช่น กำหนดให้จุดยอดอยู่ที่ $((0,0))$, $((a,0))$ และ $((0,b))$ จากสูตรการหาระยะทางระหว่างจุดสองจุด สามารถหาความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉากได้ และเมื่อยกกำลังสองทั้งสองข้าง จะได้ความสัมพันธ์ $a^2 + b^2 = c^2$ เสมอ

ขั้นตอนการพิสูจน์

1. กำหนดพิสัยบนระนาบ วางรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ที่มีมุม C เป็นมุมฉาก ลงบนระบบพิกัดฉาก โดยเลือกจุดกำเนิด (0,0) ไว้ที่จุดยอดของมุมฉากเพื่อความสะดวกในการคำนวณ:

- ให้จุด C อยู่ที่พิกัด (0, 0) (มุมฉาก)
- ให้จุด A อยู่บนแกน Y มีพิกัดเป็น (0, b) ซึ่งทำให้ด้าน AC ยาว b หน่วย
- ให้จุด B อยู่บนแกน X มีพิกัดเป็น (a, 0) ซึ่งทำให้ด้าน BC ยาว a หน่วย



2. คำนวณความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก

ใช้สูตรการหาระยะทางระหว่างจุดสองจุด (Distance Formula) บนระนาบพิกัดฉาก เพื่อหาความยาวของด้าน AB ให้ความยาวแทนด้วยตัวแปร c:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

แทนค่าพิกัดของจุด A(0, b) และ B(a, 0) ลงในสูตร:

$$c = \sqrt{(a - 0)^2 + (0 - b)^2}$$

$$c = \sqrt{a^2 + (-b)^2}$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

3. ยกกำลังสองทั้งสองข้าง

เมื่อเรายกกำลังสองทั้งสองข้างของสมการ เพื่อกำจัดเครื่องหมายรากที่สอง (Square root) จะได้:

$$c^2 = \left(\sqrt{a^2 + b^2} \right)^2$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

ซึ่งความสัมพันธ์นี้เป็นไปตาม **ทฤษฎีบทพีทาโกรัส** ทุกประการ (กำลังสองของความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก เท่ากับผลรวมของกำลังสองของความยาวด้านประกอบมุมฉาก)

4. สรุปผลการพิสูจน์

จากการกำหนดพิกัดของสามเหลี่ยมมุมฉากบนระนาบ XY และคำนวณระยะทางระหว่างจุดยอดด้วยเรขาคณิตวิเคราะห์ พิสูจน์ได้ว่า $a^2 + b^2 = c^2$ เป็นความจริงเสมอ

2.5.5 พิสูจน์โดยเวกเตอร์ (Proof by Vector)

การพิสูจน์ทฤษฎีบทพีทาโกรัสด้วยเวกเตอร์ สามารถทำได้โดยใช้สมบัติการคูณเชิงสเกลาร์ (Dot Product) ของเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกัน ซึ่งจะได้ความสัมพันธ์ $c^2 = a^2 + b^2$

สมมติให้ สามเหลี่ยม ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีมุม C เป็นมุมฉาก และกำหนดให้เวกเตอร์ตามแนวแต่ละด้านของสามเหลี่ยมเป็นดังนี้

- $\vec{u} = \vec{CA}$ (เวกเตอร์แทนด้าน a)
- $\vec{v} = \vec{CB}$ (เวกเตอร์แทนด้าน b)
- $\vec{w} = \vec{AB}$ (เวกเตอร์แทนด้านตรงข้ามมุมฉาก c)

2.5.5.1 ความสัมพันธ์ของเวกเตอร์

จากรูปสามเหลี่ยม เวกเตอร์ลัพธ์เกิดจากการเดินทางจากจุด A ไปจุด B ซึ่งสามารถเดินทางผ่านจุด C ได้ดังนี้

$$\vec{AB} = \vec{AC} + \vec{CB}$$

เนื่องจาก $\vec{AC} = -\vec{CA} = -\vec{u}$ และ $\vec{CB} = \vec{v}$

จะได้ว่า $\vec{w} = \vec{v} - \vec{u}$

2.5.5.2 หาขนาดกำลังสองด้วยการ Dot Product นำเวกเตอร์ $\vec{w}$ มาทำดอตโปรดัคต์กับตัวมันเองเพื่อหาขนาดกำลังสอง

$$\vec{w} \cdot \vec{w} = (\vec{v} - \vec{u}) \cdot (\vec{v} - \vec{u})$$

$$|\vec{w}|^2 = (\vec{v} \cdot \vec{v}) - 2(\vec{u} \cdot \vec{v}) + (\vec{u} \cdot \vec{u})$$

$$|\vec{w}|^2 = |\vec{v}|^2 - 2(\vec{u} \cdot \vec{v}) + |\vec{u}|^2$$

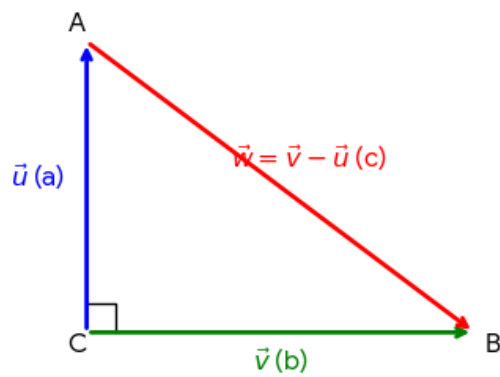
6.5.5.3 แทนค่าสมบัติมุมฉาก

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

เมื่อแทนค่ากลับเข้าไปในสมการจากข้อ 2 จะได้

$$|\vec{w}|^2 = |\vec{v}|^2 - 2(0) + |\vec{u}|^2$$

$$|\vec{w}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2$$



2.5.5.4 สรุปผลการพิสูจน์ จากรูปจะได้ $a^2 + b^2 = c^2$

บทที่ 3

วิธีดำเนินงาน

3.1 รูปแบบการศึกษา

โครงการนี้เป็นโครงการคณิตศาสตร์ประเภททฤษฎี (Theoretical Mathematics Project) ใช้วิธีการศึกษาค้นคว้าเอกสาร (Documentary Research) โดยศึกษาข้อมูลจากหนังสือเรียนคณิตศาสตร์ ตำราทางวิชาการ หนังสือประวัติศาสตร์คณิตศาสตร์ บทความวิชาการ และแหล่งข้อมูลอิเล็กทรอนิกส์ที่มีความน่าเชื่อถือ เพื่อศึกษาแนวคิด หลักการ วิธีพิสูจน์ และการประยุกต์ใช้ของทฤษฎีบทพีทาโกรัส แล้วนำข้อมูลมาวิเคราะห์ เปรียบเทียบ และสังเคราะห์องค์ความรู้ให้สอดคล้องกับวัตถุประสงค์ของโครงการ โดยนำข้อมูลมาจัดระบบ วิเคราะห์ เปรียบเทียบ และสังเคราะห์ให้สอดคล้องกับวัตถุประสงค์ของโครงการ ซึ่งในไฟล์ต้นฉบับกำหนดขอบเขตให้ศึกษาความเป็นมา หลักการ จำนวนพีทาโกรัส วิธีพิสูจน์ 5 วิธี ตลอดจนการประยุกต์ใช้ในศาสตร์ต่าง ๆ

3.2 แหล่งข้อมูล

ผู้จัดทำศึกษาข้อมูลจากแหล่งข้อมูล ดังต่อไปนี้

1. หนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐาน คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ของ สสวท.
2. หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พ.ศ.2551 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ.2560)
3. หนังสือประวัติศาสตร์คณิตศาสตร์
4. ตำราทางคณิตศาสตร์และเรขาคณิต
5. หนังสือเกี่ยวกับทฤษฎีบทพีทาโกรัส
6. บทความวิชาการและเอกสารงานวิจัย
7. เว็บไซต์ของหน่วยงานทางการศึกษา เช่น สสวท.

3.3 เครื่องมือที่ใช้ในการศึกษา

เนื่องจากเป็นโครงการประเภททฤษฎี จึงไม่มีเครื่องมือทดลองทางกายภาพ เครื่องมือที่ใช้เป็นแบบบันทึกและตารางสำหรับจัดระบบข้อมูล เครื่องมือที่ใช้ในการดำเนินโครงการ ได้แก่

- แบบบันทึกข้อมูลจากเอกสาร (Document Record Form)
- ตารางเปรียบเทียบวิธีพิสูจน์
- ตารางวิเคราะห์ข้อดี-ข้อจำกัด
- ตารางวิเคราะห์การประยุกต์ใช้
- โปรแกรม Microsoft Word

- โปรแกรม Microsoft PowerPoint
- โปรแกรม GeoGebra สำหรับสร้างรูปเรขาคณิต

3.4 ขั้นตอนการดำเนินงาน

ขั้นที่ 1 กำหนดประเด็นและวางแผนการศึกษา

กำหนดหัวข้อและวัตถุประสงค์ให้ชัดเจน จากนั้นแบ่งประเด็นการศึกษาออกเป็นประวัติ ความหมาย หลักการ จำนวนพีทาโกรัส วิธีพิสูจน์ และการประยุกต์ใช้ เพื่อให้การรวบรวมข้อมูลเป็นระบบ

ขั้นที่ 2 ศึกษาเอกสารและรวบรวมข้อมูล

ค้นคว้าข้อมูลจากหนังสือเรียน ตำรา เอกสารทางวิชาการ และแหล่งข้อมูลอิเล็กทรอนิกส์ที่มีความน่าเชื่อถือ บันทึกชื่อผู้แต่ง ปีพิมพ์ ชื่อเรื่อง และสาระสำคัญที่นำมาใช้ เพื่อให้สามารถตรวจสอบแหล่งที่มาและจัดทำบรรณานุกรมได้ถูกต้อง ศึกษาหนังสือเรียน ตำรา และเอกสารที่เกี่ยวข้อง ได้แก่

- ประวัติพีทาโกรัส
- ทฤษฎีบทพีทาโกรัส
- จำนวนพีทาโกรัส
- วิธีพิสูจน์
- การประยุกต์ใช้

ขั้นที่ 3 ตรวจสอบ รวบรวม และคัดเลือกข้อมูล

เปรียบเทียบข้อมูลจากหลายแหล่ง และคัดเลือกเฉพาะข้อมูลที่เกี่ยวข้องกับวัตถุประสงค์ โดยให้ความสำคัญกับแหล่งข้อมูลทางการศึกษาและตำราทางคณิตศาสตร์ที่ใช้เป็นมาตรฐาน รวบรวมข้อมูลจากแหล่งต่าง ๆ บันทึกข้อมูลลงในแบบบันทึกเอกสาร

- หนังสือเรียน
- ตำรา
- บทความ
- เว็บไซต์วิชาการ

ขั้นที่ 4 ศึกษาวิธีพิสูจน์ทั้ง 5 วิธี และวิเคราะห์ข้อมูล

ศึกษาหลักการและลำดับเหตุผลของการพิสูจน์โดยพื้นที่ การพิสูจน์โดยสามเหลี่ยมคล้าย การพิสูจน์โดยการจัดเรียงรูป การพิสูจน์โดยพิกัด และการพิสูจน์โดยเวกเตอร์ โดยตรวจสอบว่าทุกวิธีสามารถนำไปสู่ความสัมพัทธ์

$a^2 + b^2 = c^2$ ได้อย่างมีเหตุผล วิเคราะห์ข้อมูลตามประเด็น ได้แก่

- ความเป็นมา
- หลักการ
- วิธีพิสูจน์
- การประยุกต์ใช้

ขั้นตอนที่ 5 เปรียบเทียบวิธีพิสูจน์

นำวิธีพิสูจน์ทั้ง 5 วิธีมาเปรียบเทียบด้านแนวคิดทางคณิตศาสตร์ ความรู้พื้นฐานที่ต้องใช้ ความซับซ้อน ความชัดเจนของภาพหรือสมการ ข้อดี ข้อจำกัด และความเหมาะสมกับผู้เรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้น โดยศึกษาวิธีพิสูจน์ทั้งหมด 5 วิธี ได้แก่

1. พิสูจน์โดยพื้นที่
2. พิสูจน์โดยสามเหลี่ยมคล้าย
3. พิสูจน์โดยการจัดเรียงรูป
4. พิสูจน์โดยพิกัด
5. พิสูจน์โดยเวกเตอร์

ขั้นตอนที่ 6 วิเคราะห์การประยุกต์ใช้

รวบรวมตัวอย่างการใช้ทฤษฎีบทพีทาโกรัสในการหาระยะทางและความสูง งานเรขาคณิต งานก่อสร้าง และสถาปัตยกรรม งานวิศวกรรม ระบบกำหนดตำแหน่ง และคอมพิวเตอร์กราฟิก แล้ววิเคราะห์ว่าตัวอย่างแต่ละประเภทใช้ความสัมพันธ์ของสามเหลี่ยมมุมฉาก ศึกษาการประยุกต์ใช้ในด้านต่อไปนี้ ได้แก่

- เรขาคณิต
- วิศวกรรม
- สถาปัตยกรรม
- GPS
- คอมพิวเตอร์กราฟิก
- การแก้ปัญหาในชีวิตประจำวัน

ขั้นตอนที่ 7 สังเคราะห์องค์ความรู้

นำผลจากการศึกษาและเปรียบเทียบมาสังเคราะห์เป็นข้อสรุป โดยเชื่อมโยงกลับไปยังวัตถุประสงค์ของโครงการ จัดทำตารางสรุป และเรียบเรียงเป็นรายงานฉบับสมบูรณ์นำข้อมูลทั้งหมดมาสังเคราะห์ในรูปแบบ ได้แก่

- ตารางเปรียบเทียบ
- แผนภาพ
- สรุปผลการศึกษา

3.5 วิธีการรวบรวมข้อมูล

ผู้จัดทำรวบรวมข้อมูลด้วยการอ่านและบันทึกสาระสำคัญจากเอกสารแต่ละแหล่ง โดยจำแนกข้อมูลตามหัวข้อที่กำหนดไว้ จากนั้นจัดทำตารางบันทึกแหล่งที่มา แนวคิดสำคัญ สมการ วิธีพิสูจน์ ตัวอย่าง และการประยุกต์ใช้ วิธีดังกล่าวช่วยลดความซ้ำซ้อนของข้อมูลและทำให้สามารถตรวจสอบได้ว่าข้อสรุปแต่ละประเด็นมีหลักฐานจากแหล่งใดรองรับ

3.6 การวิเคราะห์ข้อมูล

ข้อมูลที่ได้ใช้การวิเคราะห์เชิงคุณภาพ โดยไม่ใช้สถิติเชิงทดลอง เนื่องจากโครงการนี้ไม่มีประชากรหรือกลุ่มตัวอย่าง การวิเคราะห์ประกอบด้วยการวิเคราะห์เนื้อหาเพื่อแยกแนวคิดหลัก การวิเคราะห์เชิงเปรียบเทียบเพื่อพิจารณาความเหมือนและความแตกต่างของวิธีพิสูจน์ทั้ง 5 วิธี และการสังเคราะห์เพื่อสร้างข้อสรุปเกี่ยวกับความเหมาะสมของแต่ละวิธีและการประยุกต์ใช้ ใช้การวิเคราะห์เชิงคุณภาพ (Qualitative Analysis) ประกอบด้วย

1. การวิเคราะห์เนื้อหา (Content Analysis)
2. การเปรียบเทียบข้อมูล (Comparative Analysis)
3. การสังเคราะห์องค์ความรู้ (Synthesis) โดยใช้ตารางเปรียบเทียบวิธีพิสูจน์ วิเคราะห์ข้อดี-ข้อจำกัด และความเหมาะสมของแต่ละวิธี

บทที่ 4

ผลการดำเนินงาน

จากการศึกษาค้นคว้า วิเคราะห์ และสังเคราะห์ข้อมูลตามขอบเขตของโครงการ สามารถสรุปผลการดำเนินงานได้ดังต่อไปนี้

4.1 ผลการศึกษาความเป็นมาและหลักการของทฤษฎีบทพีทาโกรัส

ผลการศึกษาพบว่า ทฤษฎีบทพีทาโกรัสเป็นทฤษฎีบทพื้นฐานทางเรขาคณิตที่อธิบายความสัมพันธ์ระหว่างด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยถ้าด้านประกอบมุมฉากมีความยาว a และ b และด้านตรงข้ามมุมฉากมีความยาว c จะได้ความสัมพันธ์ $a^2 + b^2 = c^2$ ทฤษฎีบทดังกล่าวมีบทบาทสำคัญต่อการเรียนเรขาคณิต การหาระยะทาง และการศึกษาคณิตศาสตร์ในระดับที่สูงขึ้นตามเนื้อหาที่โครงการรวบรวมไว้จาก สสวท. และเอกสารหลักสูตร

4.2 ผลการศึกษาจำนวนพีทาโกรัส

ผลการศึกษาพบว่า จำนวนพีทาโกรัสเป็นชุดจำนวนเต็มบวกสามจำนวน (a, b, c) ที่ทำให้ $a^2 + b^2 = c^2$ เช่น (3, 4, 5), (5, 12, 13), (8, 15, 17) และ (20, 21, 29) นอกจากนี้โครงการได้ศึกษาการสร้างจำนวนพีทาโกรัสมูลฐานด้วยสูตร $a = m^2 - n^2$, $b = 2mn$ และ $c = m^2 + n^2$ ภายใต้เงื่อนไขที่เหมาะสมของ m และ n ซึ่งแสดงความเชื่อมโยงระหว่างพีชคณิต ทฤษฎีจำนวน และเรขาคณิต

4.3 ผลการศึกษาวิธีพิสูจน์ทฤษฎีบทพีทาโกรัส

จากขอบเขตของโครงการ ผู้จัดทำกำหนดให้ศึกษาวิธีพิสูจน์ 5 วิธี ผลการเปรียบเทียบเชิงแนวคิดสรุปได้ดังตารางที่ 4.1

วิธีพิสูจน์	แนวคิดหลัก	ความรู้พื้นฐาน	ระดับความเข้าใจ	จุดเด่น	ข้อจำกัด
1. พื้นที่	พื้นที่สี่เหลี่ยมจัตุรัส	พื้นที่และเรขาคณิต	สูง	เห็นความสัมพันธ์ $a^2 + b^2 = c^2$ เป็นภาพ	ต้องมีรูปประกอบที่ถูกต้อง
2. สามเหลี่ยมคล้าย	อัตราส่วนด้านของรูปคล้าย	ความคล้ายและอัตราส่วน	สูง-ปานกลาง	เชื่อมโยงเรขาคณิตและการให้เหตุผล	ต้องจับคู่ด้านที่สอดคล้องกันให้ถูก
3. จัดเรียงรูป	พื้นที่คงเดิมเมื่อจัดรูปใหม่	พื้นที่และการแปลงรูป	สูง	เห็นภาพและเหมาะกับกิจกรรมเชิงรูปธรรม	ต้องออกแบบการจัดเรียงอย่างชัดเจน
4. พิสูจน์	พิกัดและระยะทาง	พีชคณิต/เรขาคณิตวิเคราะห์	ปานกลาง	เชื่อมโยงเรขาคณิตกับพีชคณิต	ต้องมีพื้นฐานระบบพิกัด
5. เวกเตอร์	เวกเตอร์ตั้งฉากและดอทโปรดักต์	เวกเตอร์และพีชคณิต	ต่ำสำหรับ ม.ต้น	แสดงโครงสร้างคณิตศาสตร์ระดับสูง	เกินระดับเนื้อหาพื้นฐานของ ม.ต้น

จากตารางที่ 4.1 ตารางการเปรียบเทียบพบว่า การพิสูจน์โดยพื้นที่และการพิสูจน์โดยสามเหลี่ยมคล้าย เหมาะสมกับผู้เรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้นมากที่สุด เนื่องจากอาศัยความรู้พื้นฐานทางเรขาคณิตและสามารถ อธิบายเป็นลำดับขั้นได้ชัดเจน ส่วนการพิสูจน์โดยพิภคช่วยให้เห็นความเชื่อมโยงระหว่างเรขาคณิตกับพีชคณิต ขณะที่การพิสูจน์โดยเวกเตอร์เหมาะสำหรับใช้เป็นการศึกษาต่อยอด เพราะต้องอาศัยความรู้ที่สูงกว่าระดับ มัธยมศึกษาตอนต้น

4.4 ผลการศึกษาการประยุกต์ใช้

จากการศึกษาตามขอบเขตของโครงการ พบว่าทฤษฎีบทพีทาโกรัสสามารถนำไปใช้ในสถานการณ์ที่สามารถสร้างหรือมองเห็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากได้ ตัวอย่างที่รวบรวมในโครงการ ได้แก่ การหาระยะทางระหว่าง จุด การหาความสูงหรือความยาวที่วัดโดยตรงได้ยาก การออกแบบและตรวจสอบโครงสร้าง การสร้างแบบจำลอง ทางเรขาคณิต ระบบกำหนดตำแหน่ง และคอมพิวเตอร์กราฟิก

ด้านการประยุกต์	ลักษณะการใช้	แนวคิดทางคณิตศาสตร์
1.การหาระยะทาง	หาระยะตรงจากระยะในแนวตั้งและแนวนอน	สร้างสามเหลี่ยมมุมฉากแล้วใช้ $a^2 + b^2 = c^2$
2.การหาความสูง	หาความสูงจากระยะฐานและระยะเอียง	ใช้ด้านประกอบมุมฉากและด้านตรงข้ามมุมฉาก
3.วิศวกรรม /สถาปัตยกรรม	ตรวจสอบมุมฉากและความยาวของส่วนประกอบ	ความสัมพันธ์ของด้านสามเหลี่ยมมุมฉาก
4.ระบบกำหนดตำแหน่ง	คำนวณระยะทางในแบบจำลองพิกัด	แนวคิดระยะทางที่มีพื้นฐานจากพีทาโกรัส
5.คอมพิวเตอร์กราฟิก	หาระยะระหว่างจุดบนระนาบ	$d = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$

4.5 อภิปรายผลการทดลองตามวัตถุประสงค์

วัตถุประสงค์ข้อที่ 1 บรรลุผลจากการศึกษาความเป็นมา ความหมาย หลักการ และสมการของทฤษฎีบท พีทาโกรัส รวมทั้งจำนวนพีทาโกรัส

วัตถุประสงค์ข้อที่ 2 บรรลุผลจากการศึกษาและเปรียบเทียบวิธีพิสูจน์ 5 วิธี โดยพบว่าแต่ละวิธีใช้แนวคิด และความรู้พื้นฐานแตกต่างกัน

วัตถุประสงค์ข้อที่ 3 บรรลุผลจากการรวบรวมและวิเคราะห์ตัวอย่างการใช้ทฤษฎีบทพีทาโกรัสใน คณิตศาสตร์และศาสตร์อื่น

วัตถุประสงค์ข้อที่ 4 บรรลุผลจากการสังเคราะห์องค์ความรู้และแสดงให้เห็นว่าการพิสูจน์หลายวิธีช่วยให้ มองเห็นความเชื่อมโยงของเรขาคณิต พีชคณิต พิกัด และเวกเตอร์

บทที่ 5 ข้อเสนอแนะ

จากการดำเนินโครงการและการวิเคราะห์เนื้อหา ผู้จัดทำมีข้อเสนอแนะเพื่อพัฒนาการศึกษาเรื่องทฤษฎีบทพีทาโกรัสให้มีความสมบูรณ์มากยิ่งขึ้น ดังนี้

5.1 ข้อเสนอแนะในการพัฒนาโครงการ

1. ควรจัดทำรูปประกอบของวิธีพิสูจน์แต่ละวิธีด้วยโปรแกรมเรขาคณิต เช่น GeoGebra เพื่อให้รูปมีสัดส่วนและตำแหน่งที่ถูกต้อง และช่วยให้ผู้อ่านติดตามขั้นตอนการพิสูจน์ได้ง่ายขึ้น
2. ควรเพิ่มวิธีพิสูจน์อื่น ๆ ที่มีแนวคิดแตกต่างจาก 5 วิธีที่ศึกษา เพื่อแสดงให้เห็นความหลากหลายของกระบวนการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์
3. ควรตรวจสอบให้แต่ละขั้นตอนของการพิสูจน์ระบุเหตุผลกำกับอย่างชัดเจน เช่น สมบัติของพื้นที่ เกล็ดความคล้าย สูตรระยะทาง หรือสมบัติของวงกลม
4. ควรเพิ่มโจทย์หรือตัวอย่างการประยุกต์ที่เชื่อมโยงกับชีวิตจริงและอธิบายขั้นตอนการสร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉากก่อนใช้สมการพีทาโกรัส
5. ควรจัดทำตารางเปรียบเทียบวิธีพิสูจน์โดยใช้เกณฑ์เดียวกันทุกวิธี เช่น ความรู้พื้นฐาน ความยาก ความชัดเจน ข้อดี ข้อจำกัด และระดับชั้นที่เหมาะสม

5.2 ข้อเสนอแนะสำหรับการศึกษาต่อยอด

1. ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างทฤษฎีบทพีทาโกรัสกับตรีโกณมิติ เรขาคณิตวิเคราะห์ และสูตรระยะทางในระบบพิกัด
2. ศึกษาการสร้างจำนวนพีทาโกรัสมูลฐานเพิ่มเติมและวิเคราะห์รูปแบบจำนวนที่เกิดจากสูตรของยุคลิด
3. พัฒนาแบบจำลองหรือสื่อแบบโต้ตอบที่ให้ผู้เรียนสามารถเคลื่อนย้ายรูปและตรวจสอบความสัมพันธ์ของพื้นที่ได้ด้วยตนเอง
4. เปรียบเทียบความเข้าใจของผู้เรียนเมื่อเรียนวิธีพิสูจน์ต่างกัน ซึ่งสามารถต่อยอดจากโครงการประเภททฤษฎีไปสู่การวิจัยด้านการเรียนการสอนได้

เอกสารอ้างอิง

- กระทรวงศึกษาธิการ. (2560). *ตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลาง กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551*. กรุงเทพมหานคร: โรงพิมพ์ชุมนุมสหกรณ์การเกษตรแห่งประเทศไทย.
- บุญมี พันธุ์ไทย. (2558). *ประวัติคณิตศาสตร์*. กรุงเทพมหานคร: สำนักพิมพ์โอเดียนสโตร์.
- จินดิษฐ์ ละออปกษิน และสมภพ วัชฤทธิ์. (2566). *คณิตศาสตร์ของเราแต่เก่าก่อน : ทฤษฎีบทพีทาโกรัส*. วารสารคณิตศาสตร์ โดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์, 68(709), 1–21.
<https://doi.org/10.14456/mj-math.2023.1>
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2563). *หนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐาน คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 เล่ม 1 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560)*. กรุงเทพมหานคร: สกสศ. ลาดพร้าว.
- สมาน แสงทองอร่าม. (2556). *ประวัติศาสตร์คณิตศาสตร์*. กรุงเทพมหานคร: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- ศิริชัย กาญจนวาสี. (2559). *คณิตศาสตร์กับการพัฒนาความคิด*. กรุงเทพมหานคร: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- Boyer, C. B., & Merzbach, U. C. (2011). *A History of Mathematics* (3rd ed.). John Wiley & Sons.
- Stewart, J. (2016). *Calculus: Early Transcendentals* (8th ed.). Cengage Learning.