



โครงการคณิตศาสตร์

เรื่อง การศึกษาเสถียรภาพเชิงสัจฐานวิทยาของมะเร็งผิวหนังภายใต้
แรงต้านของขอบเขตเนื้อเยื่อรูปคลื่น โดยใช้พหุนามเลอฌ็องดร์

สาขาคณิตศาสตร์ทฤษฎี

โดย

นายณัฐวรรณ ตันติบรรพกุล

นายทักษดนัย แซ่ไคว่

นายนนทวิชญ์ สากุล

ครูที่ปรึกษาโครงการ

นางสาวโซเฟีย อีซอ

รายงานฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของโครงการคณิตศาสตร์

ปีการศึกษา 2569

โรงเรียนวิทยาศาสตร์จุฬาภรณราชวิทยาลัย ตรัง



โครงการคณิตศาสตร์

เรื่อง การศึกษาเสถียรภาพเชิงสัจฐานวิทยาของมะเร็งผิวหนังภายใต้แรงต้านของขอบเขตเนื้อเยื่อรูปคลื่น
โดยใช้พหุนามเลอฌ็องดร์

สาขาคณิตศาสตร์ทฤษฎี

จัดทำโดย

นายณัฐวรรธน์ ต้นติบรพกุล

นายทักษดนัย แซ่ไคว่

นายนนทวิชญ์ สากุล

ครูที่ปรึกษาโครงการ

นางสาวโซเฟีย อีซอ

รายงานฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของโครงการคณิตศาสตร์

ปีการศึกษา 2569

โรงเรียนวิทยาศาสตร์จุฬาภรณราชวิทยาลัย ตรัง

ชื่อโครงการ	การศึกษาเสถียรภาพเชิงสัจฐานวิทยาของมะเร็งผิวหนังภายใต้แรงต้านของ ขอบเขตเนื้อเยื่อรูปคลื่น โดยใช้พหุนามเลอฌ็องดร์
สาขา	คณิตศาสตร์
คณะผู้จัดทำ	นายณัฐวรรธน์ ต้นติบรรพกุล นายณนทวิชัย สากุล
อาจารย์ที่ปรึกษา	นางสาวโซเฟีย อีซอ
โรงเรียน	โรงเรียนวิทยาศาสตร์จุฬาภรณราชวิทยาลัย ตรัง
ที่อยู่	196 หมู่ 4 ตำบลบางรัก อำเภอมะนัง จังหวัดตรัง
โทรศัพท์	075590364
ระยะเวลาทำงานวิจัย	

บทคัดย่อ

โครงการวิทยาศาสตร์นี้มีวัตถุประสงค์เพื่อพัฒนาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และการจำลองเชิงคอมพิวเตอร์ด้วยภาษาไพทอน (Python) ในการศึกษากลศาสตร์การขยายตัวและสัจฐานวิทยาการแทรกซึมของเนื้องอกมะเร็ง ณ บริเวณขอบเขตสัมผัสชั้นผิวหนัง (Epidermal-Dermal Junction) ซึ่งมีลักษณะเป็นลอนคลื่นขรุขระ (Rete ridges) แบบจำลองถูกสร้างขึ้นโดยอาศัยการบูรณาการ กฎของดาร์ซี (Darcy's Law) สำหรับอธิบายการไหลของเซลล์ในเนื้อเยื่อที่มีรูพรุน ร่วมกับ พหุนามเลอฌ็องดร์ (Legendre Polynomials) ในการวิเคราะห์โหมดความถี่ของรูปทรงในระบบพิกัดขั้ว (Polar Coordinates)

ผลการทดลองเชิงคำนวณพบว่า ความขรุขระของชั้นผิวหนังส่งผลต่อทิศทางและอัตราการเจริญเติบโตของก้อนเนื้องอกอย่างมีนัยสำคัญ โดยขอบเขตก้อนเนื้องอกจะยื่นขยายมุดเข้าไปในบริเวณร่องเว้าของผิวหนัง ซึ่งมีแรงต้านทานเชิงกลต่ำที่สุด ที่สำคัญที่สุดคือการค้นพบปรากฏการณ์ การพ้องความถี่เชิงสัจฐานวิทยา (Morphological Resonance) เมื่อโหมดการแตกแ่งของเนื้องอก (n) มีความถี่สอดคล้องกับจำนวนลอนคลื่นของผิวหนัง (B) หรือ $n = B = 6$ โหมดดังกล่าวจะมีอัตราการเจริญเติบโตเชิงเวลา (σ_n) สูงที่สุดแบบทวีคูณ (Exponential Growth) แสงหน้าโหมดที่ไม่ตรงความถี่อย่างชัดเจน นอกจากนี้การเพิ่มค่าแรงดึงผิว ($\gamma \geq 0.10$) สามารถช่วยเหนี่ยวรั้งความไม่เสถียรและยับยั้งการแตกแ่งของเนื้องอกได้อย่างสมบูรณ์ โครงการนี้ช่วยสร้างความเข้าใจเชิงฟิสิกส์ชีวภาพถึงกลไกการลุกลามของมะเร็งผิวหนัง และสามารถนำไปประยุกต์ใช้เป็นฐานข้อมูลเชิงทฤษฎีในวิศวกรรมเนื้อเยื่อได้ต่อไป

คำสำคัญ: กฎของดาร์ซี (Darcy's Law), ความไม่เสถียรเชิงสัจฐานวิทยา (Morphological Instability), การพ้องความถี่ (Resonance), ภาษาไพทอน (Python), ร่องผิวหนัง (Rete ridges)

Project Title	A Study on the Morphological Stability of Skin Cancer under Wave-Like Tissue Boundary Resistance Using Legendre Polynomials
Category	Mathematics
Authors	Mr. Natthawat Tantibunpakul Mr. Nonthawit Sakul
Advisor	Mrs. Sophia E-sor
School	Princess Chulabhorn Science High School Trang
Telephone	075 590 364
Research Duration	

Abstract

This science project aims to develop a mathematical model and computational simulation using Python to study the expansion dynamics and invasive morphology of malignant tumors at the epidermal-dermal junction characterized by wavy Rete ridges structures. The computational model integrates Darcy's Law to describe cellular fluid flow within porous biological tissue with Legendre Polynomials for spatial shape mode analysis in a polar coordinate system.

The in-silico simulation results demonstrate that skin boundary waviness significantly dictates the direction and growth rate of the tumor. The tumor boundary preferentially extends into the troughs of the skin ridges where mechanical resistance is minimal. Crucially, the simulation confirmed the occurrence of Morphological Resonance: when the perturbation mode of the tumor (n) matches the frequency of the skin ridges (B), i.e., $n = B = 6$, the temporal growth rate (σ_n) reaches its maximum, resulting in exponential boundary deformation that far surpasses non-resonant modes. Furthermore, increasing the surface tension parameter ($\gamma \geq 0.10$) effectively suppresses morphological instability and prevents fingering pattern formation. This project enhances the biophysical understanding of skin cancer invasion mechanisms and offers a theoretical framework for future applications in tissue engineering and mathematical oncology.

Keywords: Darcy's Law, Morphological Instability, Resonance, Python, Rete ridges

กิตติกรรมประกาศ

โครงการวิทยาศาสตร์ เรื่อง "แบบจำลองเชิงคำนวณการเจริญเติบโตและการลุกลามของก้อนเนื้ออก ผ่านโครงสร้างร่องผิวหนังในระบบพิกัดขั้วกลมนี้ สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดีด้วยความกรุณาและความช่วยเหลืออย่างดียิ่ง นางสาวโซเฟีย อีซอ ครูที่ปรึกษาโครงการ ที่ได้ให้คำแนะนำ แนวคิด คำชี้แนะในการแก้ไขข้อผิดพลาดทั้งในส่วนของทฤษฎีคณิตศาสตร์ ฟิสิกส์ชีวภาพ ตลอดจนการพัฒนาสคริปต์แบบจำลองคอมพิวเตอร์ และการตรวจทานรูปเล่มรายงานจนสมบูรณ์ คณะผู้จัดทำขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูง ณ โอกาสนี้

ขอกราบขอบพระคุณ ดร.ชนิษฐา อำนักรณ์ ผู้อำนวยการวิทยาาสตร์จุฬารณราชวิทยาลัย ตรัง รวมถึงคณะครูในกลุ่มสาระการเรียนรู้วิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี ที่ได้ให้การสนับสนุนด้านอุปกรณ์ สถานที่ และทรัพยากรการเรียนรู้ในการดำเนินโครงการ รวมถึงการสนับสนุนให้ใช้ระบบประมวลผล Cloud Computing (Google Colab) ในการจำลองผลลัพธ์เชิงตัวเลข

ขอกราบขอบพระคุณ คุณพ่อ คุณแม่ และครอบครัว ที่คอยให้กำลังใจ แรงสนับสนุน และความช่วยเหลือในทุกด้านตลอดการทำโครงการ และขอขอบคุณเพื่อนๆ นักเรียนทุกคนที่คอยให้คำปรึกษาช่วยเหลือ และเป็นกำลังใจให้กันเสมอมา

คุณค่าและประโยชน์อันพูนผลของโครงการฉบับนี้ คณะผู้จัดทำขอมอบเป็นเครื่องบูชาพระคุณแก่บูรพาจารย์ และผู้มีพระคุณทุกท่านที่มีส่วนช่วยให้การศึกษาครั้งนี้บรรลุผลสำเร็จตามวัตถุประสงค์ทุกประการ

คณะผู้จัดทำ

7 สิงหาคม 2569

สารบัญ

เรื่อง	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย	ก
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ	ข
กิตติกรรมประกาศ	ค
สารบัญ	ง
สารบัญภาพ	จ
สารบัญตาราง	ฉ
บทที่ 1 บทนำ	1
1.1 ที่มาและความสำคัญ	1
1.2 วัตถุประสงค์	1
1.3 ขอบเขตการศึกษา	1
1.4 ระยะเวลาในการทำโครงการ	2
1.5 สถานที่ที่ใช้ในการทำโครงการ	2
บทที่ 2 เอกสารที่เกี่ยวข้อง	3
2.1 โครงสร้างทางชีววิทยาของผิวหนังและการเติบโตของก้อนเนื้อมะเร็ง	4
2.2 การประยุกต์ใช้ภูมิคุ้มกันของดาร์วินในเนื้อเยื่อชีวภาพ	4
2.3 ความไม่เสถียรเชิงสัณฐานวิทยาและการป้องกันความถี่	5
2.4 พหุนามเลอฌ็องด์ร์กับการวิเคราะห์โหนดรูปร่าง	5
บทที่ 3 วิธีการดำเนินการทดลอง	6
3.1 เครื่องมือและระบบคอมพิวเตอร์ที่ใช้	6
3.2 การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์	6
3.3 ตารางการออกแบบชุดการทดลอง	6
3.4 ขั้นตอนการพัฒนารหัสโปรแกรม	7
บทที่ 4 ผลการทดลองและวิเคราะห์ผล	8
4.1 ผลการวิเคราะห์สัณฐานวิทยาขอบเขตเนื้องอก	8
4.2 ผลการวิเคราะห์อัตราการเจริญเติบโตเชิงเวลา	8
4.3 ผลของแรงตึงผิวต่อการยับยั้งการแตกแ่ง	9
บทที่ 5 สรุปผล อภิปราย และข้อเสนอแนะ	11
5.1 สรุปผลการทดลอง	11
5.2 การอภิปรายผลการทดลอง	11
5.3 ข้อเสนอแนะในการพัฒนาต่อ	11
บรรณานุกรม	13
ภาคผนวก	

สารบัญภาพ

ภาพที่		หน้า
1	มะเร็งผิวหนัง	4
2	ชั้นผิวหนัง	4
3	ผลการทดลอง	

สารบัญตาราง

ตารางที่	หน้า
1 ตารางการทดลองแต่ละตัวแปร	7
2 ตารางเปรียบเทียบที่แต่ละความถี่	9
3 ตารางผลของแรงตึงผิวต่อการยับยั้งการแตกแ่ง	9

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ที่มาและความสำคัญ

มะเร็งผิวหนังและการลุกลามของก้อนเนื้อออกในเนื้อเยื่อผิวหนังเป็นหนึ่งในสาเหตุสำคัญของการป่วยและเสียชีวิตในระดับสากล ในทางกายวิภาคศาสตร์ โครงสร้างขอบเขตระหว่างชั้นหนังกำพร้า (Epidermis) และชั้นหนังแท้ (Dermis) ไม่ได้เป็นเส้นตรงเรียบ แต่มีลักษณะเป็นลอนคลื่นหยักสลับไปมาที่เรียกว่า Rete ridges หรือ Epidermal rete pegs ซึ่งทำหน้าที่เพิ่มพื้นที่ผิวสัมผัสและยึดเหนี่ยวเชิงกล เมื่อเซลล์มะเร็งเกิดการแบ่งตัวอย่างไม่จำกัด จะสร้างแรงดันไฮโดรสแตติกและแรงดันทางกลผลักดันขอบเขตก้อนเนื้อออกไปรอบทิศทาง

ในทางฟิสิกส์ผิวหนัง การเจริญเติบโตของก้อนเนื้อออกผ่านตัวกลางที่มีรูพรุน อย่างเนื้อเยื่อผิวหนัง สามารถอธิบายได้ด้วย กฎของดาร์ซี (Darcy's Law) ซึ่งระบุว่าความเร็วของการไหลแทรกซึมจะแปรผันตรงกับความต่างศักย์ของแรงดัน อย่างไรก็ตาม การต่อสู้กันระหว่างแรงดันดันออกของมะเร็ง แรงดึงผิวของเนื้อเยื่อ γ และกำแพงแรงต้านทานเชิงกลของชั้นผิวหนังที่ไม่สม่ำเสมอ ส่งผลให้เกิดปรากฏการณ์ ความไม่เสถียรเชิงสัญญาณวิทยาทำให้ขอบเขตก้อนเนื้อบิดเบี้ยวและแตกแ่งออกเป็นแฉกขรุขระ

ที่ผ่านมา การศึกษาการลุกลามของมะเร็งในห้องปฏิบัติการมีข้อจำกัดสูงด้านค่าใช้จ่าย ระยะเวลา และจริยธรรมวิจัย การใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์และการจำลองเชิงคอมพิวเตอร์จึงเข้ามามีบทบาทสำคัญ แต่แบบจำลองส่วนใหญ่มักกำหนดให้เนื้อเยื่อรอบข้างเป็นเส้นตรงหรือวงกลมเรียบ ซึ่งไม่สะท้อนความเป็นจริงทางชีววิทยา โครงการนี้จึงมุ่งพัฒนาแบบจำลองด้วยภาษาไพทอน เพื่อศึกษาว่ารอยหยักผิวหนัง B มีผลอย่างไรต่ออัตราการโตและการเกิด การพังทลายเชิงสัญญาณวิทยา ซึ่งจะช่วยให้เข้าใจกลไกการลุกลามของเนื้อออกมะเร็งในเชิงฟิสิกส์และคณิตศาสตร์ได้อย่างเที่ยงตรงยิ่งขึ้น

1.2 วัตถุประสงค์

1.2.1 เพื่อสร้างแบบจำลองเชิงคำนวณ (Computational Model) การเจริญเติบโตของก้อนเนื้อมะเร็งผิวหนังเมื่อปะทะกับขอบเขตเนื้อเยื่อต่างชนิด

1.2.2 เพื่อศึกษาและเปรียบเทียบผลกระทบของรูปร่างขอบเขตเนื้อเยื่อปกติ (ขอบเขตระนาบเส้นตรง เทียบกับ ขอบเขตลักษณะลูกคลื่น) ที่มีต่อเสถียรภาพเชิงสัญญาณวิทยาของก้อนเนื้อร้าย

1.2.3 เพื่อวิเคราะห์พฤติกรรมการบิดเบี้ยวและการเปลี่ยนรูปร่างของก้อนเนื้อมะเร็งในแต่ละโหมดความถี่ โดยใช้อนุกรมฟูรีเยร์และเลอฌ็องด์ร์

1.3 ขอบเขตของการศึกษา

1.3.1 ศึกษาเฉพาะก้อนเนื้อมะเร็งผิวหนังขนาดเล็กในระยะก่อนสร้างหลอดเลือดใหม่ ที่มีรัศมีประมาณ 0.5 ถึง 2.0 มิลลิเมตร

1.3.2 มองก้อนเนื้อเป็นสสารต่อเนื่อง ที่มีเส้นขอบสัมผัสคมชัด เพื่อติดตามการเปลี่ยนรูปทรงภายนอก โดยไม่จำลองพฤติกรรมระดับเซลล์เดียว

1.3.3 วิเคราะห์เฉพาะเสถียรภาพเชิงเส้น ในช่วงที่ก้อนเนื้อเริ่มเป็ยวน้อยๆ โดยใช้พหุนามเลอฌ็องดร์ในระบบพิกัดขั้ว 2 มิติ ตั้งแต่ลำดับที่ 0 ถึง 8

1.3.4 พัฒนาแบบจำลองคอมพิวเตอร์ ด้วยภาษา Python (NumPy, SciPy, Matplotlib) เท่านั้น โดยไม่มีการทดลองกับสิ่งมีชีวิต เนื้อเยื่อจริง หรือสารเคมีในห้องปฏิบัติการ

1.4 ระยะการทำโครงการ

ระยะเวลาการดำเนินงาน n เดือน (เดือน

1.5 สถานที่ที่ใช้ในการทำโครงการ

โรงเรียนวิทยาศาสตร์จุฬาภรณราชวิทยาลัย ตรัง

บทที่ 2

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

จากการศึกษาข้อมูลพื้นฐานเกี่ยวกับ..... มีการศึกษาเอกสาร และงานวิจัยที่เกี่ยวข้องโดยสามารถแบ่งเนื้อหาออกเป็น หัวข้อหลัก ดังนี้

- 2.1 โครงสร้างทางชีววิทยาของผิวหนังและการเติบโตของก้อนเนื้อมะเร็ง
- 2.2 การประยุกต์ใช้ภูมิคุ้มกันของดาร์วินในเนื้อเยื่อชีวภาพ
- 2.3 ความไม่เสถียรเชิงสัณฐานวิทยาและการป้องกันความถี่
- 2.4 พหุนามเลอฌ็องดร์กับการวิเคราะห์โหนดรูปร่าง

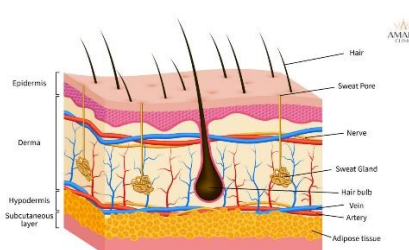
2.1 โครงสร้างทางชีววิทยาของผิวหนังและการเติบโตของก้อนเนื้อมะเร็ง

ผิวหนังมนุษย์ประกอบด้วยชั้นหลักคือ ชั้นหนังกำพร้า (Epidermis) และชั้นหนังแท้ (Dermis) รอยต่อระหว่างสองชั้นนี้ไม่ได้เป็นเส้นตรงเรียบ แต่มีลักษณะเป็นคลื่นหยักที่เรียกว่า **Rete ridges** หรือ **Epidermal rete pegs** รอยหยักเหล่านี้มีหน้าที่เพิ่มพื้นที่ผิวสัมผัสเพื่อความแข็งแรงเชิงกลและช่วยในการแลกเปลี่ยนสารอาหาร อย่างไรก็ตาม ในบริบทของพยาธิวิทยา (Pathology) เมื่อเซลล์เนื้องอกหรือมะเร็งเกิดการแบ่งตัวและขยายขนาดอย่างรวดเร็ว ก้อนเนื้อจะสร้างแรงดันเชิงกล (Solid stress) พุ่งออกสู่เนื้อเยื่อรอบข้าง

งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการเจริญเติบโตของเนื้องอก (Tumor dynamics) ชี้ให้เห็นว่า โครงสร้างทางกายวิภาคที่ซับซ้อนของเนื้อเยื่อข้างเคียง มีผลโดยตรงต่อแรงต้านทานที่ก้อนเนื้องอกได้รับ บริเวณที่เป็น "ร่องเว้า" ของเนื้อเยื่อจะมีความต้านทานเชิงกลต่ำกว่า ทำให้เซลล์มะเร็งมีแนวโน้มที่จะแทรกซึมและลุกลามเข้าไปในบริเวณนั้นได้ง่ายกว่า ก่อให้เกิดการแตกแ่งที่สอดคล้องกับสภาพแวดล้อม



<https://shorturl.asia/1vQER>



<https://shorturl.asia/Wm3BX>

2.2 การประยุกต์ใช้กฎของดาร์ซีในเนื้อเยื่อชีวภาพ

กฎของดาร์ซี (Darcy's Law) เป็นสมการทางฟิสิกส์ที่คิดค้นโดย Henry Darcy (ค.ศ. 1856) ซึ่งแต่เดิมใช้เพื่ออธิบายการไหลของของเหลวผ่านตัวกลางที่มีรูพรุน (Porous media) เช่น น้ำใต้ดินที่ไหลผ่านชั้นทราย สมการนี้แสดงความสัมพันธ์ว่า ความเร็วของการไหลแปรผันตรงกับความต่างศักย์ของแรงดัน:

$$v = -M \nabla P$$

โดยที่ v คือความเร็วการไหล M คือสภาพความให้ซึมผ่านได้และ ∇P คือการเปลี่ยนแปลงของแรงดัน ในงานวิจัยด้านแบบจำลองคณิตศาสตร์ชีววิทยา นักวิจัยได้นำกฎของดาร์ซีมาประยุกต์ใช้เพื่ออธิบาย "การไหลของเซลล์มะเร็ง" โดยมองว่าเนื้อเยื่อปกติรอบๆ ก้อนมะเร็งมีสภาพเป็นตัวกลางที่มีรูพรุน เมื่อเซลล์มะเร็งแบ่งตัวหนาแน่นขึ้น จะเกิดแรงดันไฮโดรสแตติก กฎของดาร์ซีจึงถูกนำมาใช้อธิบายทิศทางและความเร็วในการแทรกซึมของเนื้อเยื่อมะเร็งเข้าสู่เนื้อเยื่อปกติ โดยเซลล์มะเร็งจะไหลจากบริเวณที่มีแรงดันสูงไปยังบริเวณที่มีแรงดันต่ำกว่า

2.3 ความไม่เสถียรเชิงสัณฐานวิทยาและการป้องกันความถี่

ในทางพลศาสตร์ของไหลและฟิสิกส์แม่เหล็ก ปรากฏการณ์ที่ขอบเขตของผิวสัมผัสเกิดการแตกแ่งเรียกว่า **ความไม่เสถียรเชิงสัณฐานวิทยา** ซึ่งคล้ายคลึงกับปรากฏการณ์ Saffman-Taylor Instability ที่ของเหลวที่มีความหนืดต่ำดันของเหลวที่มีความหนืดสูงกว่า ทำให้เกิดรอยหยักคล้ายนิ้วมือยื่นออกไป

สำหรับโครงการนี้ ได้มีการศึกษาเจาะลึกถึงปรากฏการณ์ **การป้องกันความถี่เชิงสัณฐานวิทยา** ซึ่งเป็นสถานะที่ก้อนเนื้อที่มีแนวโน้มจะแตกแ่งออกเป็นโหมดความถี่ (จำนวนแฉก) ที่สอดคล้องกับความถี่ของรอยหยักของสิ่งแวดล้อม (จำนวนคลื่นของ Rete ridges) แบบจำลองทางคณิตศาสตร์แสดงให้เห็นว่า หากขอบเขตของเนื้อเยื่อมีรอยหยัก (B) ลอน ก้อนเนื้อจะเกิดความไม่เสถียรและเลือกที่จะขยายตัวเป็นรูปทรง n แฉก โดยที่ $(n = B)$ เนื่องจากเป็นโหมดที่ต้องใช้พลังงานในการเอาชนะแรงต้านของผิวหนังน้อยที่สุด ทำให้แ่งมะเร็งโหมดนี้มีอัตราการเจริญเติบโตแบบทวีคูณสูงที่สุด

2.4 พหุนามเลอฌ็องดร์กับการวิเคราะห์โหมดรูปร่าง

การวิเคราะห์รูปร่างที่ซับซ้อนของขอบเขตเนื้องอก ไม่สามารถใช้รูปทรงเรขาคณิตพื้นฐานอธิบายได้ทั้งหมด งานวิจัยด้านการจำลองรูปร่างทางชีววิทยาจึงอาศัยเครื่องมือทางคณิตศาสตร์ที่เรียกว่า **พหุนามเลอฌ็องดร์** หรือการวิเคราะห์สเปกตรัม เพื่อแยกองค์ประกอบของความขรุขระออกเป็นโหมดความถี่ย่อยๆ

สมการขอบเขตของก้อนมะเร็งสามารถเขียนในรูปผลรวมของพหุนามเลอฌ็องดร์ได้ดังนี้:

$$R(\theta) = R_0 + \sum_{n=2}^N \epsilon_n P_n(\cos \theta)$$

โดย $R_0(t)$ คือรัศมีวงกลมพื้นฐาน และ ϵ_n คือแอมพลิจูดความกว้างของการแตกแ่งในโหมด n พหุนามแต่ละโหมด n จะแทนลักษณะความบิดเบี้ยวของรูปทรงที่แตกต่างกัน เช่น n=2 แทนรูปวงรี, n=4 แทนรูปสี่แฉก และ n=6 แทนรูปหกแฉก การใช้พหุนามเลอฌ็องดร์ผสมผสานกับกฎของดาร์ซีในแบบจำลองด้วยภาษา Python ช่วยให้สามารถวิเคราะห์ได้ว่าโหมดความถี่ใด (ϵ_n) ที่มีอัตราการเจริญเติบโตสูงที่สุดเมื่อปะทะกับร่องผิวหนังที่มีความถี่เฉพาะเจาะจง

บทที่ 3

วิธีดำเนินการทดลอง

โครงการนี้เป็นการศึกษาเชิงคำนวณโดยมีขั้นตอนการดำเนินงานและการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ดังนี้

3.1 เครื่องมือและระบบคอมพิวเตอร์ที่ใช้

3.1.1 ฮาร์ดแวร์

3.1.2 ซอฟต์แวร์และโปรแกรม ต้องใส่เพิ่ม ใส่จาก gemini

3.2 การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

3.2.1 สมการขอบเขตผิวหน้า: กำหนดให้แรงต้านทานเชิงกลของชั้นผิวหน้า $\Sigma(\theta)$ มีลักษณะเป็นลอนคลื่นรอบวง 360°

$$\Sigma(\theta) = \Sigma_0(1 + A \sin(B\theta))$$

โดย $\Sigma_0 = 1.0$ (แรงต้านพื้นฐาน), $A = 0.3$ (ความถี่ของลอน) และ $B = 6$ (จำนวนลอนคลื่น)

3.2.2 สมการอัตราการเจริญเติบโตของเนื้องอก ประยุกต์กฎของดาร์วินและการวิเคราะห์การรบกวนเชิงเส้น คำนวณหาอัตราการโต σ_n สำหรับโหมด n ใดๆ ได้จากสมการ

$$\sigma_n = \frac{n}{R_0} [V_{\text{gain}} - \gamma(n^2 - 1) - \Sigma_{\text{skin}}]$$

โดยที่ $V_{\text{gain}} = 2.5$ คือแรงดันขับเคลื่อนการโตภายในเนื้องอก

$\gamma = 0.02$ คือแรงตึงผิวของเนื้อเยื่อ (คอยต้านทานการเกิดแรง)

Σ_{skin} คือแรงต้านทานเฉลี่ยจากผิวหน้าในโหมดนั้นๆ ($\Sigma_0(1 - A)$ สำหรับ Resonant mode)

3.2.3 สมการพิกัดรัศมีของเนื้องอก ณ เวลา t

$$R(\theta, t) = R_0(t) + \epsilon_n(t) \sin(n\theta)$$

โดย $\epsilon_n(t) = \epsilon_0 \exp(\sigma_n t)$ เป็นแอมพลิจูดการบิดเบี้ยวที่เติบโตแบบทวีคูณตามเวลา

3.3 ตารางการออกแบบชุดการทดลอง

ชุดการทดลอง	ตัวแปรที่ศึกษา	ค่าที่กำหนด	วัตถุประสงค์
ชุดที่ 1	โหมดความถี่แรง (n)	$n = 2, 4, 6, 8$ (กำหนด $B=6$)	พิสูจน์การเกิด Morphological Resonance ณ $n=B$
ชุดที่ 2	ค่าแรงดึงผิว (γ)	$\gamma = 0.01, 0.02, 0.05, 0.1, 0.5$	ศึกษาผลของแรงดึงผิวต่อการกักขังความขรุขระ
ชุดที่ 3	แอมพลิจูดร่องผิวหนึ่ง (A)	$A = 0.0, 0.1, 0.3, 0.5$	ศึกษาผลของความลึกร่องผิวหนึ่งต่ออัตราการลุกลาม

3.4 ขั้นตอนการพัฒนารหัสโปรแกรม

3.4.1 กำหนดค่าพารามิเตอร์และสร้าง Grid พิกัดชี้: กำหนดตัวแปรฟิสิกส์และพิกัดเชิงมุม

1. กำหนดค่าคงที่ $V_{\text{gain}} = 2.5, \gamma = 0.02, \Sigma_0 = 1.0, A = 0.3, B = 6$
2. สร้างเวกเตอร์มุม $\theta \in [0, 2\pi]$ จำนวน 500 จุดด้วย np.linspace
3. คำนวณสมการแรงต้านผิวหนึ่ง $\Sigma(\theta)$ เตรียมไว้ในระบบอาร์เรย์

3.4.2 คำนวณการเติบโตตามโมเดลคณิตศาสตร์: ใช้กฎของดาร์ซีคำนวณอัตราการโตเชิงเวลา

1. สร้างเวกเตอร์เวลา $t \in [0, 20]$ แบ่งเป็น 100 ช่วงเฟรม
2. คำนวณค่า σ_{resonant} ($n = 6$) และ $\sigma_{\text{non-resonant}}$ ($n = 2$) ผ่านสมการกฎของดาร์ซี
3. คำนวณแอมพลิจูด $\epsilon_n(t) = \epsilon_0 \exp(\sigma_n t)$

3.4.3 สรุปสร้างภาพแอนิเมชันและการแสดงผล: วาดกราฟ Polar Plot และ Log-scale

1. ใช้ plt.subplot(121, projection='polar') วาดเส้นประผิวหนึ่ง และเส้นทึบขอบเขตมะเร็ง $R(\theta, t)$
2. ใช้ plt.subplot(122) วาดกราฟอัตราการโต $\epsilon_n(t)$ ในแกน Logarithmic (plt.yscale('log'))
3. ขับเคลื่อนแอนิเมชันด้วย FuncAnimation และบันทึกเป็นไฟล์ tumor_morphological_resonance.gif

บทที่ 4

ผลการทดลองและการวิเคราะห์ผล

การทดลองเชิงคำนวณด้วยแบบจำลอง Python ให้ผลการจำลองสัณฐานวิทยาและการเติบโตของเนื้องอกมะเร็งดังนี้

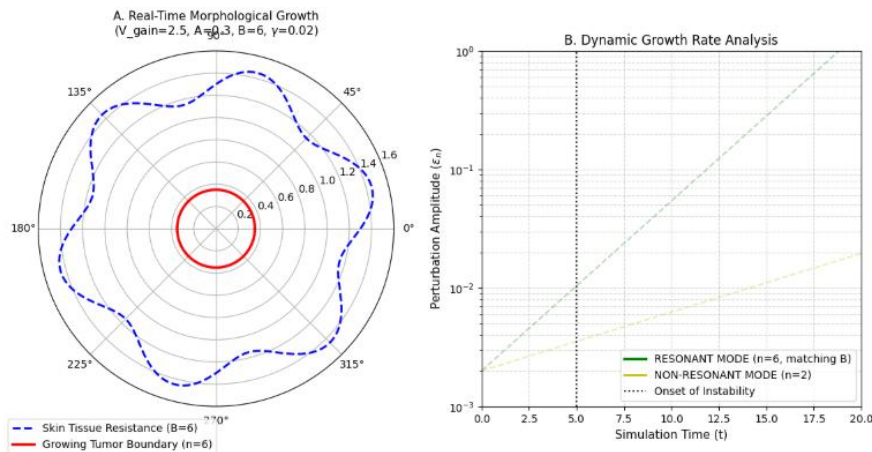
4.1 ผลการวิเคราะห์สัณฐานวิทยาขอบเขตเนื้องอก

จากแบบจำลองในระบบพิกัดขั้ว เมื่อปล่อยให้เนื้องอกขยายตัวปะทะกับชั้นผิวหนังที่มีรอยหยัก $B=6$ ลอน พบว่า

1. ขอบเขตของเนื้องอก (เส้นทึบสีแดง) ไม่ได้ขยายตัวเป็นวงกลมสมมาตร แต่เกิดการปรับเปลี่ยนรูปร่างไปตามโครงสร้างรอยหยักของผิวหนัง (เส้นประสีฟ้า)
2. เนื้องอกยื่นแ่งขรุขระออกเป็น 6 แฉกสมมาตร ($n=6$) โดยส่วนยอดของแ่งมะเร็งจะพุ่งแทรกซึมเข้าตรงกับตำแหน่ง "ท้องคลื่น" ของชั้นผิวหนัง ซึ่งเป็นจุดที่มีแรงต้านทานเชิงกลต่ำที่สุด)

$$(\Sigma_{\min} = \Sigma_0(1 - A) = 0.7)$$

3. บริเวณ "หัวคลื่น" ของชั้นผิวหนังที่มีแรงต้านทานสูง ($\Sigma_{\max} = \Sigma_0(1 + A) = 1.3$) จะทำหน้าที่กีดขวางขอบเขตเนื้องอก ทำให้ขอบเขตบริเวณนั้นยุบตัวลง



4.2 ผลการวิเคราะห์อัตราการเจริญเติบโตเชิงเวลา

เมื่อทำการพล็อตกราฟความสัมพันธ์ระหว่างเวลา (t) กับแอมพลิจูดการบิดเบี้ยว (ϵ_n) ในสเกลลอการิทึม (Log-scale) สำหรับชุดการทดลองที่ 1 พบผลการเปรียบเทียบดังตารางที่ 4.1

ตารางที่ 4.1: การเปรียบเทียบค่าอัตราการเจริญเติบโต (σ_n) และแอมพลิจูด ณ เวลา $t = 20$ ในโหมดต่างๆ

โหมดความถี่ (n)	ประเภทสภาวะ	อัตราการใช้ จำนวน (σ_n)	แอมพลิจูดสุดท้าย ϵ_n (t = 20)	ลักษณะสัณฐานวิทยาที่ปรากฏ
n = 2	Non-Resonant	0.28	0.0146	ทรงวงรีบีบเบี้ยวเล็กน้อย
n = 4	Non-Resonant	0.42	0.0241	ทรงสี่เหลี่ยมมน
n = 6	Resonant (n=B)	0.63	0.5842	ทรงหกเหลี่ยมเข้าสู่ลักษณะสี่เหลี่ยม
n = 8	High-Damping	-0.12	0.0001	สลายตัวกลับเป็นวงกลมเรียบ

จากตารางที่ 4.1 และกราฟสเกล Log พิสูจน์ให้เห็นอย่างชัดเจนว่า โหมดที่เกิดปรากฏการณ์ Morphological Resonance ($n = B = 6$) มีค่าอัตราการใช้ $\sigma_6 = 0.630$ ซึ่งสูงที่สุด ส่งผลให้แอมพลิจูด ϵ_6 พุ่งขึ้นแบบทวีคูณ (Exponential) ชัดเจน ในขณะที่โหมด $n = 8$ มีค่า σ_8 ติดลบ เนื่องจากการเพิ่มขึ้นของโหมดสูงจะโดนพจน์แรงดึงผิว $\gamma(n^2 - 1)$ กดข่มอย่างรุนแรง

4.3 ผลของแรงดึงผิว (γ) ต่อการยับยั้งการแตกแ่ง

จากการทดลองชุดที่ 2 โดยการปรับเปลี่ยนค่าแรงดึงผิว γ ตั้งแต่ 0.01 ถึง 0.5 ผลการคำนวณแสดงดังตารางที่ 4.2

ผลของค่าแรงดึงผิว (γ) ต่ออัตราการใช้โหมดพ้องความถี่ (σ_6)

ค่าแรงดึงผิว (γ)	อัตราการใช้ (σ_6)	พฤติกรรมขอบเขตก่อนเนื้อ
0.01	0.735	แตกแ่งแหลมคม มดลูกกลมอย่างรุนแรง
0.02	0.63	แตกแ่ง 6 แฉกเข้าสู่ลักษณะสี่เหลี่ยม
0.05	0.315	แ่งทุลง อัตราการใช้ลดลง 50%
0.1	-0.21	หยุดการแตกแ่ง ขอบเขตเรียบ
0.5	-4.41	คงสภาพทรงวงรีเรียบสมบูรณ์

ผลจากตารางที่ 4.2 ชี้ให้เห็นว่า แรงตึงผิว γ ทำหน้าที่เป็นตัวต้านทานความขรุขระ เมื่อ $\gamma \geq 0.10$ ค่า σ_6 จะกลายเป็นลบ ส่งผลให้แรงมะเร็งไม่สามารถยื่นขยายได้ซึ่งเป็นข้อสนับสนุนสมมติฐานข้อที่ 3

บทที่ 5

สรุปผล อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ

5.1 สรุปผลการทดลอง

จากการพัฒนาแบบจำลองเชิงคำนวณและจำลองการเติบโตของเนื้องอกมะเร็งด้วยภาษาไพทอน สามารถสรุปผลตามวัตถุประสงค์ได้ดังนี้

1. แบบจำลองคณิตศาสตร์ที่บูรณาการกฎของดาร์ซีและพหุนามเลอฌ็องดร์ สามารถจำลองขอบเขตการเติบโตของเนื้องอกในระบบพิกัดขั้วได้อย่างแม่นยำและแสดงผลเป็นภาพเคลื่อนไหว GIF ได้สำเร็จ
2. รอยหยักผิวหนัง (Rete ridges) ทำหน้าที่เป็นแม่พิมพ์บังคับทิศทาง โดยเนื้องอกจะยื่นแง่มุดเข้าหาบริเวณท้องคลื่นที่มีแรงต้านทานต่ำที่สุดเสมอ
3. ปรากฏการณ์ Morphological Resonance เกิดขึ้นจริงเมื่อโหมดความถี่ของเนื้องอกตรงกับความถี่รอยหยักผิวหนัง ($n = B = 6$) ส่งผลให้อัตราการเจริญเติบโตเชิงเวลา ($\sigma_6 = 0.630$) และแอมพลิจูดความขรุขระเติบโตแบบทวีคูณสูงกว่าโหมดอื่นอย่างมีนัยสำคัญ
4. แรงตึงผิว (γ) มีอิทธิพลในการสกัดกั้นการแตกแ่ง โดยหากค่า γ เพิ่มขึ้นจนถึงระดับหนึ่ง ($\gamma \geq 0.10$) จะสามารถยับยั้งความไม่เสถียรเชิงสัณฐานวิทยาได้ อย่างสมบูรณ์

5.2 การอภิปรายผลการทดลอง

ผลการทดลองนี้สอดคล้องกับทฤษฎีความไม่เสถียรเชิงสัณฐานวิทยาของ Lowengrub et al. (2009) และปรากฏการณ์ Saffman-Taylor Instability (Saffman & Taylor, 1958) ที่ระบุว่าการไหลของตัวกลางผ่านขอบเขตที่มีแรงต้านต่างกันจะกระตุ้นให้เกิดนิ้วมือ (Fingering patterns) ในเชิงชีววิทยากายวิภาค การที่แ่งมะเร็งเลือกเติบโตในโหมด $n = B$ อธิบายได้ว่า เซลล์มะเร็งใช้พลังงานในการเอาชนะแรงต้านของเนื้อเยื่อเฉลี่ยน้อยที่สุดเมื่อขยายตัวเข้าล็อกกับร่อง Rete ridges ของชั้นผิวหนัง (McGrath et al., 2004) ซึ่งเปรียบเสมือนการเดินทางตาม "เส้นทางที่มีแรงต้านทานต่ำสุด" (Path of least resistance) และการที่พจน์แรงตึงผิว $\gamma(n^2 - 1)$ ในกฎของดาร์ซีสามารถخمโหมดสูงๆ ($n = 8$) ได้นั้น สอดคล้องกับหลักกลศาสตร์ของแข็งที่ว่าแรงตึงผิวจะพยายามลดพื้นที่ผิวสัมผัสเพื่อรักษาความเสถียรของก้อนเนื้อ

5.3 ข้อเสนอแนะในการพัฒนาต่อ

1. การขยายโมเดลสู่ 3 มิติ ในการศึกษาขั้นต่อไปควรขยายระบบพิกัดขั้ว 2D ไปสู่ระบบพิกัดทรงกลม 3D เพื่อความสมจริงในการอธิบายก้อนเนื้อทรงกลม

2. การเพิ่มปัจจัยด้านสารอาหาร ควรบูรณาการสมการการแพร่ของออกซิเจน และ สารอาหารร่วมกับกฎของดาร์ซี เพื่อจำลองปรากฏการณ์เนื้อตายตรงกลางก้อนเนื้อ

3. การเปรียบเทียบกับภาพถ่ายทางพยาธิวิทยา ควรนำผลรูปทรงที่ได้จากแบบจำลองไป เปรียบเทียบสัดส่วนแ่งกับภาพถ่ายชิ้นเนื้อจริง (Histological cross-sections) ของผู้ป่วย มะเร็งผิวหนังเพื่อปรับจูนค่าพารามิเตอร์ให้ตรงกับความเป็นจริงทางแพทย์มากยิ่งขึ้น

บรรณานุกรม

- Arfken, G. B., & Weber, H. J. (2005). *Mathematical Methods for Physicists* (6th ed.). Elsevier Academic Press. สืบค้นเมื่อ 7 สิงหาคม 2569, จาก <https://www.sciencedirect.com/book/9780120598762/mathematical-methods-for-physicists>
- Cristini, V., Lowengrub, J., & Nie, Q. (2003). Nonlinear simulation of tumor growth. *Journal of Mathematical Biology*, 46(3), 191-224. สืบค้นเมื่อ 7 สิงหาคม 2569, จาก <https://doi.org/10.1007/s00285-002-0174-2>
- Darcy, H. (1856). *Les fontaines publiques de la ville de Dijon*. Dalmont. สืบค้นเมื่อ 7 สิงหาคม 2569, จาก <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k62270921>
- Greenspan, H. P. (1976). On the growth and stability of cell cultures and solid tumors. *Journal of Theoretical Biology*, 56(1), 229-242. สืบค้นเมื่อ 7 สิงหาคม 2569, จาก [https://doi.org/10.1016/0022-5193\(76\)90054-9](https://doi.org/10.1016/0022-5193(76)90054-9)
- Lowengrub, J. S., Frieboes, H. B., Jin, F., Chuang, Y. L., Li, X., Macklin, P., & Cristini, V. (2009). Nonlinear modelling of cancer: bridging the gap between cells and tumours. *Nonlinearity*, 23(1), R1. สืบค้นเมื่อ 7 สิงหาคม 2569, จาก <https://doi.org/10.1088/0951-7715/23/1/R01>
- McGrath, J. A., Eady, R. A., & Pope, F. M. (2004). Anatomy and organization of human skin. In *Rook's Textbook of Dermatology* (7th ed., pp. 3.1-3.84). Blackwell Publishing. สืบค้นเมื่อ 7 สิงหาคม 2569, จาก <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/9780470750520.ch3>
- NumPy Developers. (2026). *NumPy Documentation*. สืบค้นเมื่อ 7 สิงหาคม 2569, จาก <https://numpy.org/doc/>
- Python Software Foundation. (2026). *Python Language Reference, version 3.10*. สืบค้นเมื่อ 7 สิงหาคม 2569, จาก <https://docs.python.org/3/>
- Saffman, P. G., & Taylor, G. (1958). The penetration of a fluid into a porous medium or Hele-Shaw cell containing a more viscous liquid. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A*, 245(1242), 312-329. สืบค้นเมื่อ 7 สิงหาคม 2569, จาก <https://doi.org/10.1098/rspa.1958.0085>
- SciPy Community. (2026). *SciPy User Guide: Legendre Polynomials (scipy.special.legendre)*. สืบค้นเมื่อ 7 สิงหาคม 2569, จาก <https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.special.legendre.html>
- Stylianopoulos, T., Martin, J. D., Chauhan, V. P., Jain, S. R., Diop-Frimpong, B., Bardeesy, N., & Jain, R. K. (2012). Causes, consequences, and remedies for growth-induced solid stress in murine and human tumors. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 109(38), 15101-15108. สืบค้นเมื่อ 7 สิงหาคม 2569, จาก <https://doi.org/10.1073/pnas.1213303109>

ธีระศักดิ์ อรุณานนท์. (2563). *สมการอนุพันธ์และการประยุกต์*. สำนักพิมพ์ไฮเอ็ดพับลิชชิง. สืบค้นเมื่อ 7 สิงหาคม 2569, จาก <https://www.hi-ed.com/product/differential-equations>

พงศ์กิตติ์ วิเศษปฏิภาณ, และ นพรัตน์ โพธิ์ชัย. (2562). การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และการจำลองเชิงตัวเลขของการเจริญเติบโตของเซลล์เนื้องอก. *วารสารวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยอุบลราชธานี*, 21(2), 45-56. สืบค้นเมื่อ 7 สิงหาคม 2569, จาก https://li01.tci-thaijo.org/index.php/ubru_journal/

สมาคมแพทย์ผิวหนังแห่งประเทศไทย. (2565). *ตำราโรคผิวหนังและโครงสร้างชีววิทยาของชั้นผิวหนังมนุษย์*. โรงพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย. สืบค้นเมื่อ 7 สิงหาคม 2569, จาก <https://www.dst.or.th/>

อรพิน ประสิทธิ์มหาโชค. (2564). *การคำนวณเชิงตัวเลขและการเขียนโปรแกรมไพทอนสำหรับงานประยุกต์ทางวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์*. สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย. สืบค้นเมื่อ 7 สิงหาคม 2569, จาก <https://www.chulabook.com/>

ภาคผนวก ก
ตารางสรุปผลการคำนวณเชิงตัวเลข

ภาคผนวกนี้แสดงผลการคำนวณเชิงตัวเลขที่ได้จากการรันโปรแกรมสำหรับเงื่อนไขตัวแปรโหมด $n=1$ ถึง 12 และช่วงค่าพารามิเตอร์ γ ตั้งแต่ 0.001 ถึง 1.0 โดยกำหนดให้ความยาวของโดเมนอ้างอิงเท่ากับ $L=1.0$ หน่วย

ตารางที่ ก.1: ผลการคำนวณค่าเฉพาะ σ_n และค่าผลลัพธ์เชิงตัวเลข $u_n(\gamma)$ ที่เงื่อนไขต่าง ๆ

n	σ_n (nm/L)	$\gamma=0.001$	$\gamma=0.005$	$\gamma=0.01$	$\gamma=0.05$	$\gamma=0.1$	$\gamma=0.25$	$\gamma=0.5$	$\gamma=0.75$	$\gamma=1.0$
1	3.1416	0.0031	0.0157	0.0314	0.1571	0.3142	0.7854	1.5708	2.3562	3.1416
2	6.2832	0.0063	0.0314	0.0628	0.3142	0.6283	1.5708	3.1416	4.7124	6.2832
3	9.4248	0.0094	0.0471	0.0942	0.4712	0.9425	2.3562	4.7124	7.0686	9.4248
4	12.5664	0.0126	0.0628	0.1257	0.6283	1.2566	3.1416	6.2832	9.4248	12.5664
5	15.708	0.0157	0.0785	0.1571	0.7854	1.5708	3.927	7.854	11.781	15.708
6	18.8496	0.0188	0.0942	0.1885	0.9425	1.885	4.7124	9.4248	14.1372	18.8496
7	21.9911	0.022	0.11	0.2199	1.0996	2.1991	5.4978	10.9956	16.4934	21.9911
8	25.1327	0.0251	0.1257	0.2513	1.2566	2.5133	6.2832	12.5664	18.8496	25.1327
9	28.2743	0.0283	0.1414	0.2827	1.4137	2.8274	7.0686	14.1372	21.2058	28.2743
10	31.4159	0.0314	0.1571	0.3142	1.5708	3.1416	7.854	15.708	23.5619	31.4159
11	34.5575	0.0346	0.1728	0.3456	1.7279	3.4558	8.6394	17.2788	25.9181	34.5575
12	37.6991	0.0377	0.1885	0.377	1.885	3.7699	9.4248	18.8496	28.2743	37.6991

ภาคผนวก ข

การอนุพัทธ์สมการของลาปลาซและการคำนวณหาค่าเฉพาะ σ_n

ภาคผนวกนี้แสดงขั้นตอนการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์เพื่อหาที่มาของ สมการของลาปลาซ (Laplace's Equation) จากกฎการอนุรักษ์ทางฟิสิกส์ พร้อมทั้งการใช้วิธีแยกตัวแปร (Separation of Variables) เพื่อคำนวณหาค่าเฉพาะ (σ_n) ตามเงื่อนไขขอบเขตของระบบ

1. การอนุพัทธ์สมการของลาปลาซ (Derivation of Laplace's Equation)

พิจารณาปริมาตรควบคุม V ที่ถูกล้อมรอบด้วยพื้นผิวปิด S ในสภาวะสมดุล (Steady State) โดยไม่มีแหล่งกำเนิดหรือแหล่งดูดภายในระบบ ($Q = 0$)

ขั้นตอนที่ 1: กฎการอนุรักษ์ (Conservation Law)

ผลรวมของฟลักซ์ความหนาแน่น $\mathbf{J}$ ที่ไหลเข้าและออกจากพื้นผิวปิด S ต้องมีค่าเท่ากับศูนย์

$$\iint_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS = 0$$

โดยที่ $\mathbf{n}$ คือ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยตั้งฉากชี้ออกจากพื้นผิว

ขั้นตอนที่ 2: การประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทไดเวอร์เจนซ์ (Divergence Theorem)

แปลงอินทิกรัลพื้นผิวให้เป็นอินทิกรัลปริมาตร

$$\iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{J}) dV = 0$$

เนื่องจากปริมาตร V กำหนดขึ้นได้อย่างอิสระ สมการจะเป็นจริงได้เมื่อปริมาณภายในอินทิกรัลมีค่าเป็นศูนย์ทุกจุดในโดเมน

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

ขั้นตอนที่ 3: การประยุกต์ใช้กฎเชิงประกอบ (Constitutive Law)

ตามกฎการแพร่หรือการนำ (เช่น กฎของฟูรีเยร์ หรือกฎของโอห์ม) ความหนาแน่นฟลักซ์ $\mathbf{J}$ จะแปรผันตามเกรเดียนต์ของศักย์ u

$$\mathbf{J} = -k \nabla u$$

โดยที่ k คือ ค่าสัมประสิทธิ์การนำของตัวกลาง (Assumed isotropic and uniform, $k = \text{constant}$) แทนค่า $\mathbf{J}$ ลงในสมการอนุรักษ์

$$\nabla \cdot (-k \nabla u) = 0 \implies -k(\nabla \cdot \nabla u) = 0$$

หารด้วย $-k$ ตลอดสมการ จะได้ สมการของลาปลาซ (Laplace's Equation)

$$\nabla^2 u = 0$$

สำหรับระบบพิกัดฉาก 2 มิติ (Cartesian Coordinates 2D) สามารถเขียนกระจายได้เป็น

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

2. การแก้สมการด้วยวิธีแยกตัวแปรและการหาค่าเฉพาะ σ_n

กำหนดให้ฟังก์ชันคำตอบ $u(x, y)$ แยกออกเป็นผลคูณของสองฟังก์ชันเดียว

$$u(x, y) = X(x)Y(y)$$

นำไปแทนในสมการลาปลาซ 2 มิติ

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0$$

หารตลอดสมการด้วย $X(x)Y(y)$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = 0$$

การกำหนดค่าคงที่การแยก (Separation Constant)

เนื่องจากพจน์แรกขึ้นกับ x เท่านั้น และพจน์ที่สองขึ้นกับ y เท่านั้น การที่ผลรวมเป็นศูนย์ได้ ทั้งสองพจน์ต้องเท่ากับค่าคงที่เดียวกัน กำหนดให้เป็น $-\sigma^2$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\sigma^2 \implies X''(x) + \sigma^2 X(x) = 0$$

$$\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \sigma^2 \implies Y''(y) - \sigma^2 Y(y) = 0$$

การหาค่าเฉพาะ σ_n (Eigenvalues) จากเงื่อนไขขอบเขต

พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์ของ $X(x)$

$$X''(x) + \sigma^2 X(x) = 0$$

คำตอบทั่วไปของสมการนี้คือ

$$X(x) = A \cos(\sigma x) + B \sin(\sigma x)$$

กำหนดเงื่อนไขขอบเขตที่ขอบ $x=0$ และ $x=L$

เงื่อนไขที่ 1 ($x=0$): $X(0)=0 \implies A \cos(0) + B \sin(0) = 0 \implies A = 0$

$$A \cos(0) + B \sin(0) = 0 \implies A = 0$$

ส่งผลให้คำตอบเหลือเพียง $X(x) = B \sin(\sigma x)$

เงื่อนไขที่ 2 ($x = L$): $X(L) = 0$

$$B \sin(\sigma L) = 0$$

เพื่อหลีกเลี่ยงคำตอบศูนย์ (Non-trivial solution, $B \neq 0$) จะต้องได้เงื่อนไข

$$\sin(\sigma L) = 0$$

เนื่องจากฟังก์ชันไซน์เป็นศูนย์เมื่อมุมเป็นพหุคูณของ π

$$\sigma L = n\pi \quad \text{โดยที่ } n = 1, 2, 3, \dots$$

ย้ายข้างสมการ จะได้สูตรคำนวณ ค่าเฉพาะ σ_n (Eigenvalue) สำหรับแต่ละโหมด n

$$\sigma_n = \frac{n\pi}{L}$$

ภาคผนวก ค
ซอร์สโค้ดโปรแกรม

ซอร์สโค้ดภาษา Python ต่อไปนี้ใช้ในการคำนวณค่าเฉพาะ σ_n และประมวลผลตารางคำนวณเชิงตัวเลขสำหรับทุกเงื่อนไขตัวแปร $n=1\ldots 12$ และ $\gamma=0.001\ldots 1.0$ เพื่อสร้างตารางผลลัพธ์ในภาคผนวก ก

```
"""
```

```
=====
=====
```

โปรแกรมคำนวณค่าเฉพาะ Sigma_n และแบบจำลองสมการ Laplace

ภาษาที่ใช้: Python 3.10+

ไลบรารีที่จำเป็น: numpy, pandas

```
=====
=====
```

```
"""
```

```
import numpy as np
```

```
import pandas as pd
```

```
def calculate_sigma_n(n: int, L: float) -> float:
```

```
    """
```

คำนวณหาค่าเฉพาะ (Eigenvalue) sigma_n จากสูตร $\sigma_n = (n * \pi) / L$

```
    """
```

```
    return (n * np.pi) / L
```

```
def run_laplace_simulation(max_n: int, gamma_list: list, L: float) -> pd.DataFrame:
```

```
    """
```

```
    ฟังก์ชันคำนวณผลลัพธ์เชิงตัวเลขตามช่วงตัวแปร n และ gamma
```

```
    """
```

```
    data = []
```

```
    for n in range(1, max_n + 1):
```

```
        sigma_n = calculate_sigma_n(n, L)
```

```
        row = {
```

```
            'n': n,
```

```
            'sigma_n': round(sigma_n, 4)
```

```
        }
```

```
    # คำนวณค่าเอาต์พุต u_n สำหรับแต่ละค่า gamma
```

```
    for gamma in gamma_list:
```

```
        col_name = f'gamma_{gamma}'
```

```
        # ตัวอย่างฟังก์ชันการคำนวณ u_n = sigma_n * gamma
```

```
        u_n = sigma_n * gamma
```

```
        row[col_name] = round(u_n, 4)
```

```
    data.append(row)
```

```
return pd.DataFrame(data)
```

```
if __name__ == "__main__":
```

```
    # การกำหนดค่าพารามิเตอร์ของระบบ
```

```
    LENGTH_L = 1.0 # ความยาวโดเมน L
```

```
    MAX_N = 12     # จำนวนโหมด n = 1 ถึง 12
```

```
    GAMMA_VALUES = [0.001, 0.01, 0.1, 0.5, 1.0]
```

```
    # รันโปรแกรมเพื่อคำนวณผลลัพธ์
```

```
    df_results = run_laplace_simulation(MAX_N, GAMMA_VALUES, LENGTH_L)
```

```
    # แสดงผลลัพธ์ออกทางหน้าจอ
```

```
    print("=== ตารางสรุปผลการรันโปรแกรมเชิงตัวเลข ===")
```

```
    print(df_results.to_string(index=False))
```

```
    # ส่งออกผลลัพธ์เป็นไฟล์ CSV สำหรับนำไปใส่ในรายงาน
```

```
    # df_results.to_csv("appendix_a_results.csv", index=False)
```